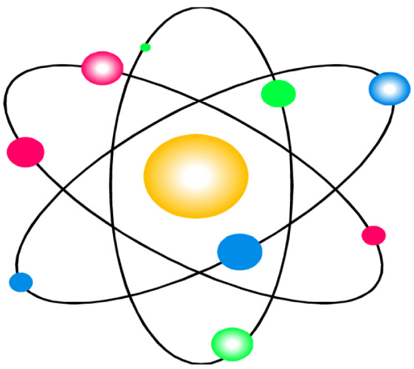
Министерство образования и науки Хабаровского края

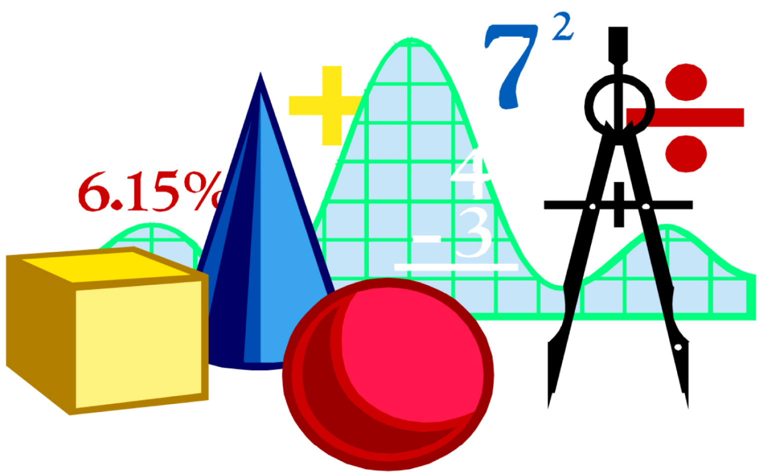
Краевое государственное бюджетное образовательное учреждение
дополнительного образования
«Хабаровский краевой центр развития творчества детей и юношества»

Хабаровская краевая заочная физико-математическая школа



Ю.В. Жулидова, В.В. Мендель, Н.Е. Пишкова

МАТЕМАТИКА:
Практикум по решению задач элементарной математики



Хабаровск
2017

Ю.В. Жулидова, В.В. Мендель, Н.Е. Пишкова

МАТЕМАТИКА: Практикум по решению задач элементарной математики

учебно-методическое пособие для студентов-бакалавров педагогических направлений подготовки и учащихся старших классов общеобразовательных учреждений

Подписано к печати 17.07.2017 г. Формат 60х84 1/16.
Тираж 100 экз.

КГБОУ ДО «Хабаровский краевой центр развития творчества детей и юношества».
680000, г. Хабаровск, ул. Комсомольская, 87

© Министерство образования и науки Хабаровского края, 2017
© КГБОУ ДО «Хабаровский краевой центр развития творчества детей и юношества», 2017
© *Ю.В. Жулидова, В.В. Мендель, Н.Е. Пишкова, 2017*

ОГЛАВЛЕНИЕ

Жулидова Ю.В., старший преподаватель кафедры математики и информационных технологий педагогического института ТОГУ

ГРАФЫ, ЛОГИКА, ДЕЛИМОСТЬ

ГРАФЫ

Исторически сложилось так, что теория графов зародилась именно в ходе решения головоломок двести с лишним лет назад. Первая работа о графах, принадлежащая швейцарскому математику Леонарду Эйлеру появилась в 1736 году. Эйлер начал свою работу о графах с рассмотрения одной головоломки - так называемой «задачи о кёнигсбергских мостах». Город Кёнигсберг расположен на берегах реки Прегель и двух островах. Различные части города были соединены семью мостами. По воскресеньям горожане совершали прогулки по городу. Вопрос заключался в том, можно ли совершить прогулку таким образом, чтобы, выйдя из дома, вернуться обратно пройдя в точности один раз по каждому мосту?

При необходимости провести взаимосвязь между достаточно большим количеством неких объектов мы, скорее всего, непроизвольно начнем рисовать на бумаге точки (кружочки), изображающие наши объекты, и соединять эти точки линиями или стрелками, отображающими интересующие нас отношения между рассматриваемыми объектами.

Имея перед глазами рисунок (схему), легче оценить представляющие интерес взаимозависимости между объектами. Такие схемы широко используют в различных областях. Это и электрические цепи, и диаграммы, и сети коммуникаций, и схемы метрополитена, и так далее, и так далее.

Что такое граф?

Определение. *Граф* - это фигура, состоящая из точек (называемых вершинами) и отрезков, соединяющих некоторые из этих вершин. Соединяющие отрезки могут быть прямолинейными или криволинейными.

Определение. *Вершина графа* - либо конец какого-нибудь ребра графа либо изолированная точка графа.

Определение. *Ребро графа* - кривая, соединяющая две вершины графа и не содержащая других вершин.

Более подробно и понятно эти определения рассмотрим на примере решения задачи о спортивных состязаниях.

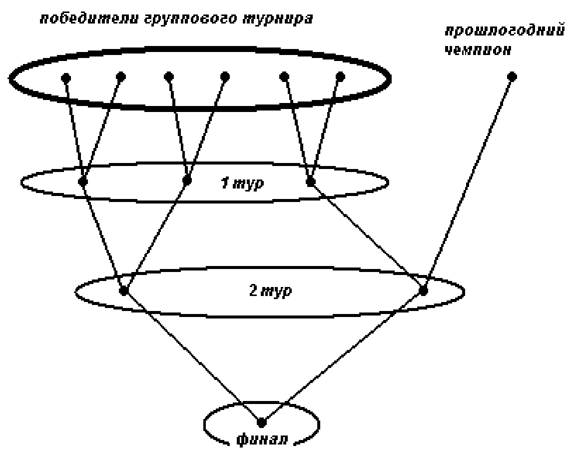


рис.1

Пример 1. *В розыгрыше финальной части турнира участвуют семь команд: шесть команд, набравших наибольшее количество очков в* *предварительной части турнира и команда – победитель прошлого года. Сначала играют друг с другом первые шесть команд, затем три команды, одержавшие победы и команда, победитель прошлого года, играют друг с другом. Два победителя этого тура встречаются в финале.*

Решение. Понять о чем идет речь в этом тексте нелегко. Попробуем представить его в виде наглядной схемы (смотри рис.1) и порядок организации финальной части розыгрыша станет очевидным.

Рассмотрим некоторый граф *Г.* Обозначим количество его вершин буквой p, а количество ребер буквой q.

Определение. *Степенью вершины* графа называется число выходящих из него ребер, при этом вершины называют *четными*, если степень вершины четна и *нечетные*, если степень вершины нечетна.

Определение. Граф называют *простым*, если две вершины соединяет не более одного ребра, в противном случае, граф называют *мультиграфом*.

Определение. Граф называется *полным*, если каждая его вершина соединена со всеми другими вершинами.

Сформулируем простейшие свойства степени вершины:

1. Сумма степеней всех вершин графа Г равна удвоенному количеству его ребер (2q);

2. В простом графе найдется не менее двух вершин с одинаковыми степенями;

3. В простом графе с p вершинами число ребер не больше $\frac{p(p-1)}{2}$.

Примеры полных графов вы можете построить сами: нарисуйте выпуклый многоугольник и постройте все его диагонали. В полном графе с p вершинами $\frac{p(p-1)}{2}$ ребер.

Пример 2. *По рисунку определить: сколько вершин, ребер у графа и какова степень каждой вершины графа?*

Решение. Сначала посчитаем количество вершин. Для наглядности на первых порах их можно выделить другим цветом – 8 вершин (рис.2).

Для подсчета ребер удобно посчитанное ребро выделять черточкой, чтобы не посчитать его дважды – 9 ребер (рис.3)

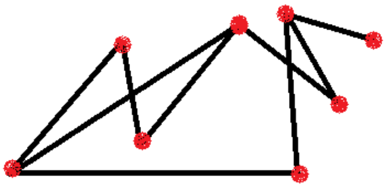


рис. 2

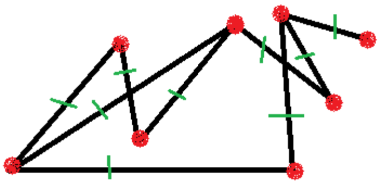


рис. 3

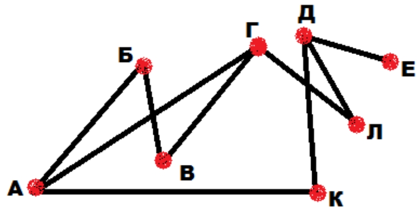


рис. 4

Для определения степени вершины графа лучше все вершины обозначить буквами (рис.4), а потом результаты записать в таблицу.

А	Б	В	Г	Д	Е	К	Л
3	2	2	3	3	1	2	2

Пример 3. *Построить граф у которого вершины имеют следующие степени: а) А – 7, Б – 3, С – 1; б) А – 5, Б – 1, С – 4.*

Решение. Сначала необходимо проверить, возможно ли вообще построение заданного графа.

Для этого необходимо применить первое свойство. Построение графа а) невозможно, так как все его вершины нечетные, и число их нечетно. А вот граф б) построить можно, так как у него две нечетных вершины. Причем могут получаться различные по конфигурации графы (рис.5-7).

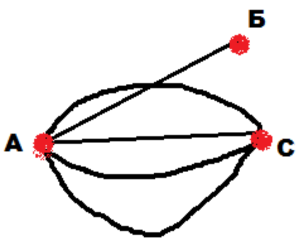


рис. 5

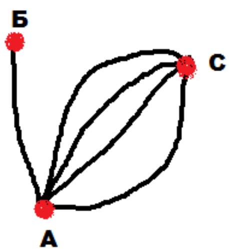


рис. 6

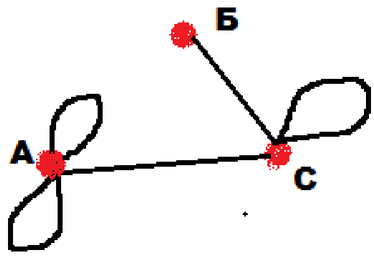


рис. 7

Пример 4. *Десять человек приветствовали друг друга рукопожатиями. Пять человек сделали по семь рукопожатий, трое – по пять, двое – по четыре. Сколько всего было сделано рукопожатий?*

Решение. Вначале надо разобраться, что мы понимаем под понятием рукопожатие на языке графов. Одно рукопожатие – это две вершины соединены одним ребром. То есть, два человека и у них одно рукопожатие на двоих. Данную задачу можно переформулировать на язык графов следующим образом: дано 10 вершин, известны степени каждой вершины и нужно узнать, сколько ребер в этом графе. Чтобы узнать количество ребер в графе надо сложить степени каждой вершины и разделить пополам – применить третье свойство. Так как пять человек сделали по семь рукопожатий, то это значит, что из пяти вершин выходят по семь ребер, а всего ребер: 5+5+5+5+5+5+5=5*7. Аналогично рассуждаем и с остальными вершинами, получаем: (5*7+3*5+2*4)/2=(35+15+8)/2=58/2=29.

Задания для самостоятельной работы

1. Дайте характеристики приведенным графам:
- сколько вершин и ребер?
- определить степень каждой вершины графа.
- сколько четных и нечетных вершин?
- является ли граф простым, мультиграфом или полным?

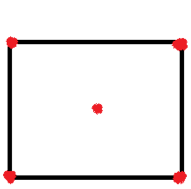
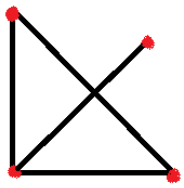
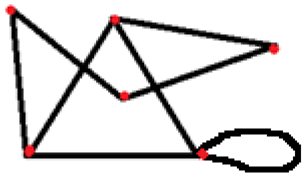
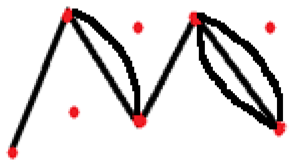
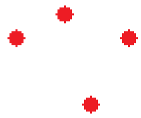






рис. а **рис. б** **рис. в** **рис. г** **рис. д**

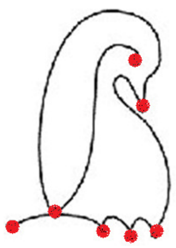
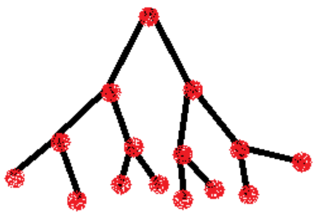
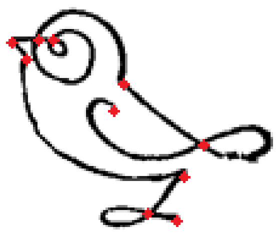





рис. е **рис. ф** **рис. ж** **рис. и**

2. Даны степени вершин графа: А – 2, Б – 5, С – 1, Д – 4. Без построения графа, определить число ребер графа.

3. Построить граф у которого вершины имеют следующие степени:
- А – 6, Б – 2, С – 1;
- А – 4, Б – 3, С – 2, Д – 1;
- А – 3, Б – 2, С – 2, Д – 1, Е – 0;
- А – 3, Б – 2, С – 3, Д – 2, Е – 3, Л – 2.

4. Можно ли организовать футбольный турнир девяти команд так, чтобы каждая команда провела по четыре встречи?

5. Можно ли 15 телефонов соединить между собой так, чтобы каждый из них был связан ровно с 11 другими?

6. В государстве 100 городов, из каждого выходит 4 дороги. Сколько всего дорог в государстве?

7. Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит 3 дороги, быть ровно 100 дорог?

8. В шахматном турнире участвовало семь человек. Каждый с каждым сыграл по одной партии. Сколько партий они сыграли?

Пути, циклы, связность

Еще одно важное понятие, относящееся к графам – **связность**. Для того чтобы ввести его, дадим несколько определений. Начнем с понятия **путь**.

Определение. *Путем* (из вершины A в вершину B) в графе называется последовательная цепочка смежных ребер, которая начинается в вершине A и заканчивается в вершине B. Путь может проходить через ребро только один раз.

Запись пути в графе зависит от того, как определены его ребра. Если ребра определены с помощью вершин, то записывают последовательность тех вершин, через которые проходит путь. Если же ребра имеют собственные названия, то выписывается последовательность из этих названий.

Определение. *Циклом* называется путь, у которого начало и конец совпадают.

Графы бывают с циклом (рис. 8 цикл выделен голубым цветом) и без цикла (рис. 9).

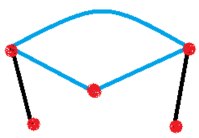


рис. 8

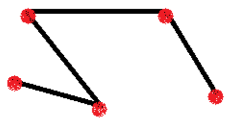


рис. 9

Определение. Граф называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить хотя бы одним путем. В противном случае граф называется ***несвязным***.

Вам уже, наверное, приходилось встречать задачи, в которых предлагается обвести ту или иную фигуру, не отрывая карандаш от бумаги. При этом запрещается проводить карандаш по одной линии несколько раз. Понятно, что аналогичное задание может быть дано и относительно некоторого графа. Далеко не все графы можно построить описанным выше способом. Т.е., для которых это требование выполняется, называются ***уникурсальными*** или **эйлеровыми**.

Теорема (Эйлера). *Связный граф уникурсален тогда и только тогда, когда степени всех его вершин четны или у него ровно две вершины нечетной степени.*

Существует еще одна очень интересная задача, связанная с графами. В ней требуется отыскать простой цикл, который проходит через все вершины данного связного графа. Эта задача является частным случаем "задачи коммивояжера", суть которой в следующем. Коммивояжер (разъездной торговец) должен проехать по всем городам некоторого региона и вернуться в исходный пункт. При этом целесообразно так составить маршрут, чтобы в каждом городе побывать ровно один раз (иначе покупатели могут предъявить счет за некачественный товар). У коммерсанта, естественно, имеется карта дорог региона.

Циклы, обладающие указанным выше свойством, называют *гамильтоновыми*, в честь их изобретателя Гамильтона, придумавшего игру – головоломку, в которой требовалось отыскать такие пути.

В отличие от эйлеровых циклов, для гамильтоновых циклов нет исчерпывающего условия, подобного теореме Эйлера. Имеется следующий достаточный признак.

Теорема. *Пусть связный граф имеет не меньше четырех вершин (p>3) и степень каждой вершины не меньше p/2, тогда в графе имеется гамильтонов цикл.*

Важным частным случаем графа является дерево. Это название связано с типичным видом некоторых представителей данного класса. Дадим определение.

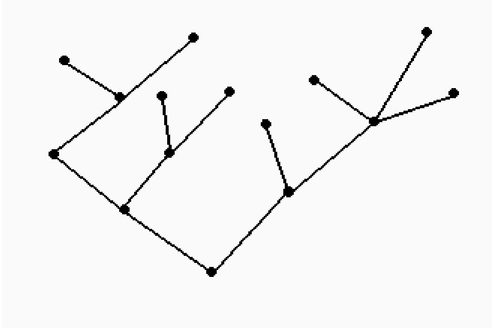


рис. 10

Определение. *Деревом* называется связный граф, не содержащий циклов. Несвязный граф, не имеющий циклов, называют **лесом**. (В лесу, как известно, не меньше двух деревьев.)

На рисунках 10 и 11 приведены примеры деревьев. Как видите, далеко не все они напоминают по форме дерево. Тем не менее, можно так деформировать граф на рисунке 11, что он станет полностью похож на граф с рисунка 10. Нас будет интересовать вопрос о том, когда граф является деревом. Ответ на него сформулируем ниже, а сейчас укажем одно интересное свойство деревьев.

Теорема. *В любом дереве существует хотя бы одна вершина степени единица. (Такие вершины называют “висячими”.)*

Теперь сформулируем теорему, являющуюся признаком дерева.

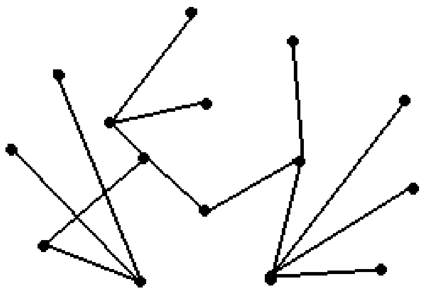


рис.11

Теорема. *Связный граф является деревом тогда и только тогда, когда количество его вершин на единицу превосходит количество ребер, т.е.* $p-q=1$.

Одна из важных прикладных задач, относящихся к графам, это отыскание *минимального остова* графа. Поясним, о чем идет речь. Пусть имеется связный граф Γ, необходимо найти такой его подграф, который связен, содержит все вершины исходного графа, и при удалении любого ребра становится несвязным (в этом и заключено условие минимальности). Нетрудно догадаться, что такой минимальный остов является деревом.

Пример 5. *Среди предложенных графов (рис.12-15) найти графы-деревья и графы с циклом. Укажите, сколько вершин входит в цикл?*

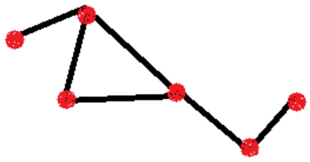


рис. 12


рис. 13

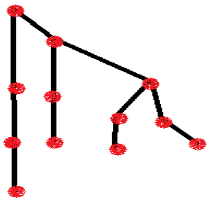


рис. 14

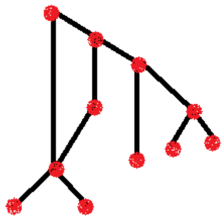


рис. 15

Решение. Графы-деревья изображены на рис.13 и рис.14; графы с циклом – рис.12 (цикл состоит из 3 вершин) и рис. 15 (цикл состоит из 4 вершин).

Пример 6. *Из предложенных графов (рис.16-19) найти те, которые можно изобразить одним росчерком (т.е. не отрывая карандаш от бумаги и не проходя по любому ребру дважды) и нарисовать их.*

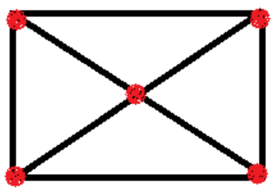


рис. 16

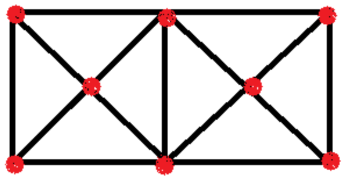


рис. 17

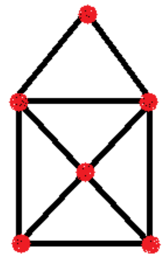


рис. 18

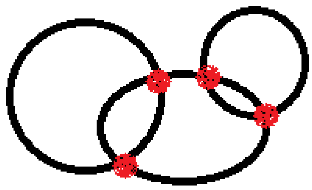


рис. 19

Решение. Для решения этого задания необходимо посчитать степени всех вершин, определить нечетные вершины и посчитать их количество. Если их 2 или 0, то граф построить можно в противном случае – нет.

Перед тем, как изображать графы необходимо учесть, что для более быстрого и правильного способа изображения графов надо знать: если граф имеет две нечетных вершины, то его изображение надо начинать из одной нечетной вершины, а заканчивать – в другой. Если же все вершины графа четные, то начало и конец графа совпадают. Графы, изображенные на рис.16 и 17 нельзя нарисовать, а остальные можно.

Далее введем понятия *ориентированный* и *неориентированный* графы.

Если ребро соединяет вершину А с вершиной В и пара (А,В) считается упорядоченной, то это ребро называют **ориентированным**, вершину А – его началом, вершину В – его концом, а само ребро изображают в виде стрелки. Если же эта пара считается неупорядоченной, то ребро называют **неориентированным**, а обе вершины – его концами. Граф с ориентированными ребрами называется ориентированный. Граф с неориентированными ребрами называется неориентированный.

Например, только из города А в город В едет автобус №1, а из города Д в город С и обратно едет автобус №2. Изображением маршрута автобуса №1 будет ориентированный граф, вершина А будет его началом, а вершина В будет его концом (рис. 20). Изображением маршрута автобуса №2 будет неориентированный граф, и вершины С и Д будут называться его концами (рис.21).

рис. 20

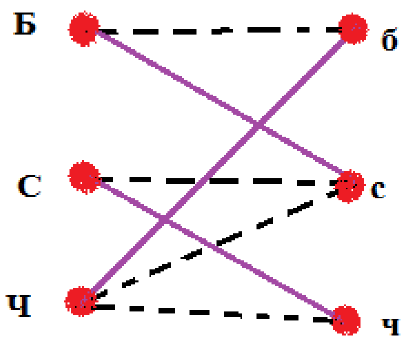
рис. 21

Пример 7. *Встретились три друга – Белов, Серов и Чернов. Чернов сказал другу, одетому в серый костюм: «На одном из нас белый костюм, на другом – серый и на третьем – черный, но на каждом костюм цвета, не соответствующего фамилии». Какой цвет костюма у каждого?*

Решение. Начнем решать задачу с построения графа. Первые три вершины будут обозначать фамилии трех друзей. Вторые три вершины – цвета их костюмов. Причем, для большей наглядности, вторая тройка вершин должна находиться справа от первой тройки.

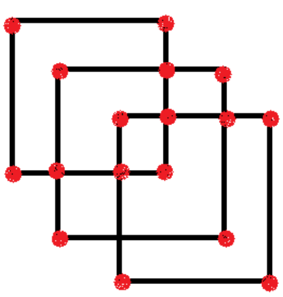
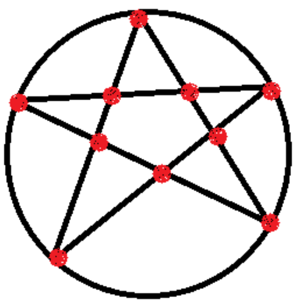
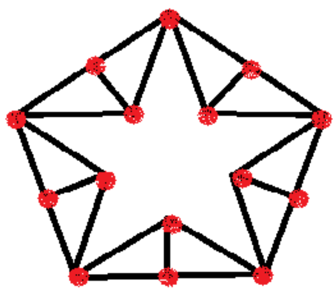
Наша задача построить три ребра, то есть соединить фамилию с цветом костюма. Так как цвет костюма не соответствует фамилии, то пунктиром покажем, куда нельзя проводить ребра.

Далее анализируем условие задачи: «Чернов сказал другу, одетому в серый костюм», значит на Чернове не серый костюм. Покажем это условие так же пунктиром. Остается, что на Чернове белый костюм, покажем это условие ребром. Так как белый костюм уже занят, то остается Серову – черный, а Белову – серый, покажем это тоже ребрами. Итак, мы решили задачу с построением несвязного графа, который содержит 6 вершин и 3 ребра.

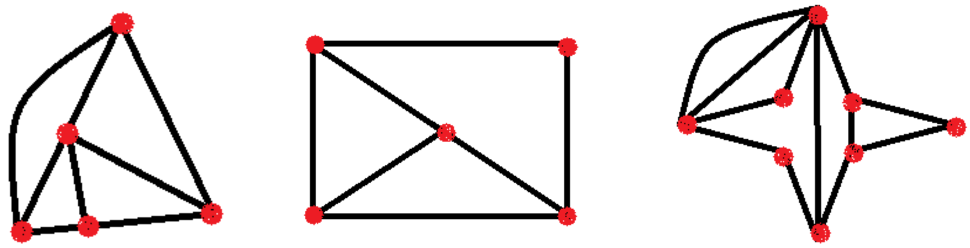


Задания для самостоятельной работы

1. Из предложенных графов найти те, которые можно изобразить одним росчерком (т.е. не отрывая карандаш от бумаги и не проходя по любому ребру дважды) и нарисовать их.

2. Достроить графы до Эйлеровых:



3. В стране алфавит 8 городов: А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З и 8 непересекающихся дорог между городами А и Б, Е и Д, Б и Ж, З и А, В и Г, Г и Д, Ж и З, В и Е. Можно ли по этим дорогам проехать из А в Г?
4. В квартирах №1,2,3 жили три друга: Айдар, Тима и Саша. Известно, что в квартирах №1 и 2 жил не Айдар. Тима жил не в квартире №1. В какой квартире жил каждый из друзей?
5. Три друга Алеша, Боря и Вова после школы едут домой на различном транспорте: автобусе, маршрутке, трамвае. Однажды после уроков Алеша пошел проводить своего друга до остановки автобуса. Когда мимо них проходила маршрутка, третий друг крикнул из окна: «Боря, ты забыл в школе тетрадку!» Кто на чем ездит домой?
6. Три подруги Тамара, Валя и Лида были в белом, красном и голубом платьях. Их туфли были тех же цветов. Только у Тамары цвета платья и туфель совпадали. Валя была в белых туфлях. Ни платье, ни туфли Лиды не были красными. Определите цвет платья и цвет туфель каждой из подруг.
7. Три друга – Леша, Сергей и Денис – купили щенков разной породы: щенка таксы, щенка колли и щенка овчарки. Известно, что: щенок Леши темнее по окрасу, чем такса, Леси и Гриф; щенок Сергея старше Грифа, овчарки и таксы; Джек и такса всегда гуляют вместе. У кого какой породы щенок? Назовите клички щенков.
8. В столовой на горячее можно заказать щуку, грибы и баранину, на гарнир – картофель и рис, а из напитков – чай и кофе. Сколько различных вариантов обедов можно составить из указанных блюд?
9. Алла решила маме на день рождения подарить букет цветов (розы, тюльпаны или гвоздики) и поставить их или в вазу или в кувшин. Сколькими способами это можно сделать?
10. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, используя в записи числа каждую из них не более одного раза?
11. В первенстве класса по шашкам 5 участников: Аня, Боря, Влад, Гриша, Даша. Первенство проводится по круговой системе – каждый из участников играет с каждым из остальных один раз. К настоящему времени некоторые игры уже проведены: Аня сыграла с Борей, Владом и Дашей. Боря сыграл с Аней и Гришей, Влад – с Аней и Дашей, Гриша – с Борей, Даша – с Аней и Гришей. Сколько игр проведено к настоящему времени и сколько еще осталось?

ЛОГИКА

Введение

Для точности мышления и понимания необходима *точность языка*. Точность естественного языка не всегда достаточна, слова и фразы не всегда толкуются однозначно, огромную роль играет контекст.

Пусть сказано: «Маша любит кашу». Это утверждение верно или нет? Но отвечать на такой вопрос бессмысленно, т.к. данное предложение можно трактовать разными способами. Например «Любая Маша любит любую кашу» - это неверно. Другой вариант: «Есть такая Маша и такая каша, что эта Маша любит эту кашу», должно быть, верно.

Союзы *и, или* также употребляются как в обычной, так и в математической речи.

Так, союз «и» в обыденной речи понимается двояко. Надпись «Места для детей и инвалидов» не означает, что на данное место может претендовать только больной ребенок. А фраза «К доске пойдут Вася и Федя» означает, что у доски окажутся два ученика.

То же касается союза «или». Фраза «Сегодня в шесть часов вечера я буду в кино или на стадионе» подразумевает только одну из двух указанных возможностей, в то время как фраза «Сегодня в шесть часов вечера я буду смотреть кино по телевизору или лежать на диване» не исключает совмещения обоих занятий.

В математике мы также имеем дело с различными утверждениями, например:

- число 100 делится на 4;
- через две точки можно провести две прямые;
- число 0,00000001 очень мало.

Относительно одних утверждений можно сказать, что в них говорится нечто правильное, относительно других - утверждается нечто неверное. Например, утверждение А - верное, утверждение В - неверное. Относительно утверждения С нельзя сказать, является оно верным или нет, т.к. оно не имеет точного смысла.

Суть проблемы в том, что математический текст излагается на естественном языке, и требуемая точность понимания математического текста «зависает» из-за неоднозначности толкования фраз естественного языка. Поэтому необходимы четкие договоренности. Где же их взять? Разве что позаимствовать у формальной или математической логики.

Высказывания и операции над ними

Определение. Утверждение, которое является верным, называется *истинным*.
Определение. Утверждение, которое является неверным, называется *ложным*.
Определение. *Высказыванием* называется любое утверждение, о котором можно сказать, истинно оно или ложно.

Высказывания обладают следующими свойствами:

1. Всякое высказывание является либо истинным, либо ложным (закон исключенного третьего).

2. Никакое высказывание не может быть одновременно истинным и ложным (закон противоречия).

3. Предложение, о котором невозможно однозначно решить вопрос, истинно оно или ложно, высказыванием не является.

На множестве высказываний можно ввести операции, позволяющие образовывать новые высказывания. Например, если заданы два высказывания A{сейчас солнечно} и B{сейчас ветрено}, то с помощью связок «и», «или», «не» можно образовать новые высказывания вида: {сейчас солнечно и ветрено}, {сейчас солнечно или ветрено} и т.д. Такие высказывания называют составными, а входящие в них высказывания A и B - элементарными.

Определение. *Отрицанием* высказывания A называется высказывание, которое истинно, когда A ложно, и ложно, если A истинно. Обозначение: $\overline{A}$, читается: «не A» или «неверно, что A».

Пример 8. Отрицанием высказывания {через две точки можно провести две прямые} является высказывание {через две точки нельзя провести две прямые}. Отрицанием высказывания {число 37 не делится на 2} будет высказывание {число 37 делится на 2},

Высказывание «Число 12 простое» - это ложное высказывание. Если построить его отрицание: «Неверно, что число 12 простое», то получим истинное высказывание.

Определение. *Конъюнкцией* двух высказываний A и B называется высказывание, которое истинно в том и только в том случае, если истинны оба высказывания. Обозначение: $A \wedge B$, читается: «A и B».

Пример 9. Конъюнкцией высказываний {точка A лежит на прямой a} и {точка A лежит на прямой b} является высказывание {точка A лежит на прямой a и на прямой b},

- высказывание «Число 102 четное и делится на 9» имеет форму «A и B», где A – число 102 четное – Истина, а B – число 102 делится на 9 – Ложь. Следовательно, и все предложение ложно.

Определение. *Дизъюнкцией* двух высказываний A и B называется высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда ложны оба высказывания. Обозначение: $A \vee B$, читается: «A или B».

Пример 10. Дизъюнкцией высказываний {точка A лежит на прямой a} и {точка A лежит на прямой b} является высказывание {точка A лежит на прямой a или на прямой b}, где связка "или" не имеет разделительного смысла. То есть точка A может лежать либо только на прямой a, либо только на прямой b, либо же на прямой a и прямой b одновременно,

- высказывание «Число 15 четное или делится на 3» имеет форму «А или В», где А – Число 15 четное – Ложь, а В – число 15 делится на 3 – Истина. Следовательно, и все предложение истинное.

Задания для самостоятельной работы

1. Какие из предложений являются высказываниями:
   - Днем светло.
   - В небе летают грузовик.
   - Приготовьтесь к уроку!
   - Квадрат является геометрической фигурой.
2. Какие из равенств или неравенств верные, а какие неверные:
   - 35:5=6
   - 18760>18670
   - 91<91
3. Постройте отрицания высказываний:
   - Сестра всегда старше брата,
   - 25 меньше, чем 25,
   - ни одна рыба не кусается,
   - Саша не принес на урок ни линейки, ни карандаша.
4. Используя простые высказывания, составьте с помощью логических операций новые высказывания и определите, какие из них истины:
   - «Число 15 делится на 5», «Число 15 больше 10»,
   - «При делении 42 на 5 в остатке получится 2», «При делении 42 на 5 в остатке получится 5»,
   - «Треугольник ABC прямоугольный», «Треугольник ABC равносторонний»,
   - «x<5», «x>3»
5. Определить, как было составлено высказывание и является ли оно истинным или ложным:
   - Число 2 чётное и простое,
   - 8<5<4,
   - Число 36 делится на 6 или на 9,
   - 4≥6,
   - В равностороннем треугольнике все стороны и углы равны,
6. Каждое из следующих предложений замените конъюнкцией либо дизъюнкцией, имеющей тот же смысл:
   - число 7 принадлежит хотя бы одному из множеств А и В,
   - квадратное уравнение имеет не более двух корней,
   - каждое слагаемое суммы x + y + z делится на 3,
   - по крайней мере одно из натуральных чисел n, n-1, n+1 четно.

Законы логики

1. Закон противоречия

Сущность закона: два несовместимых друг с другом суждения не могут быть одновременно истинными; по крайней мере, одно из них обязательно ложно. Записывается: А не есть не-А.

Сформулированное требование закона противоречия выражает объективные свойства самих вещей. Например: "Этот человек храбр" и "Этот человек труслив"; "Все планеты внутри холодные" и "Все планеты внутри горячие".

Из приведенных примеров видно, что данный закон только указывает на ложность одного из двух логически суждений. Вопрос о том, какое из двух суждений истинно, а какое ложно, решается в процессе конкретного исследования и проверки на практике.

2. Закон исключенного третьего

Сущность закона: два противоречащих исключенного суждения и тоже время и в одном и том же отношении, не могут быть вместе истинными или ложными. Одно - необходимо истинно, а другое - ложно; третьего быть не может. Записывается: или а, или не-а.

Реально такие связи образуются из следующих пар суждений:

- "Это S есть Р" и "Это S не есть Р" (единичные суждения);
- "Все S есть Р" и "Некоторые S не есть Р" (суждения А и Q),
- "Ни одно S не есть Р" и "Некоторые S есть ^"(суждения Е и I).

Подобно закону противоречия закон исключенного третьего не указывает, какое из двух противоречивых суждений будет истинным по своему содержанию.

3. Закон двойного отрицания

Закон двойного отрицания -- положенный в основу классической логики принцип, согласно которому «если неверно, что неверно А, то верно А».

В традиционной содержательной математике закон двойного отрицания служит логическим основанием для проведения так называемых доказательств от противного.

К логическим задачам отнесем такие, при решении которых главное, определяющее - это отыскание связи между фактами, сопоставление их, построение цепочки рассуждений для достижения цели. Можно выделить несколько логических задач по содержанию и методам решения:

1. Решение задач с помощью простых таблиц. Цель –исключить все случаи, которых не может быть. Основная идея – выделить ключевые условия.
2. Задачи с набором разнородных условий. Цель – перебор всех возможных вариантов в каждой группе, которые надо исключить с установлением связей между ними.
3. Задачи с учётом порядка следования элементов. Цель – исключить все ненужные случаи с учётом порядка следования элементов.

4. Задачи на закон исключённого третьего. Цель – выбрать правильное решение из двух возможных вариантов при сделанных предположениях истинности.

5. Задачи на закон двойного отрицания. Цель – замена двойного отрицания более простым высказыванием с последующим выбором правильного решения из всех возможных.

Кроме перечисленных, встречаются и комбинированные задачи, например такие, в которых требуется учесть порядок следования элементов, причем часть условий в задаче оказывается ложной.

Пример 11. *В одной школе учатся три друга: Сергей, Коля и Максим. Их фамилии Петров, Семёнов и Иванов. Сергей учится в 5 классе, мама Коли инженер. Иванов учится в 6 классе, его мама бухгалтер. Сергей и Семёнов болеют за разные футбольные клубы.*

Решение. Выпишем условия задачи в следующем порядке:

1) Сергей учится в 5 классе.
2) Иванов учится в 6 классе.
3) Мама Коли инженер.
4) Мама Иванова бухгалтер.
5) Сергей и Семёнов болеют за различные футбольные клубы.

Будем рассуждать и одновременно заполнять таблицу. Известно, что Сергей учится в 5-м классе, а Иванов – в 6-м. Значит, Сергей и Иванов –два разных мальчика. В первой клетке третьей строки таблицы ставим знак «–». Ещё известно, что мама Коли инженер, а мама Иванова бухгалтер. Это значит, что Коля и Иванов – мальчики из разных семей. Но тогда фамилия Коли не Иванов. Во второй клетке третьей строки таблицы ставим «–». Получается, что Ивановым может быть только Максим. Сергей может быть или Петровым или Семёновым. Но в условии 5 сказано, что Сергей и Семёнов болеют за разные футбольные клубы. Значит, Сергей не Семёнов. В первой клетке второй строки ставим «–». Получается, что Семёновым может быть только Коля. Тогда фамилия Сергея –Петров.

Фамилия	Имя		
	Сергей	Коля	Максим
Петров	+	-	-
Семенов	-	+	-
Иванов	-	-	+

Пример 12. *Встретились три друга: скульптор Белов, скрипач Чернов и художник Рыжов. «Замечательно, что один из нас блондин, другой брюнет, а третий рыжеволосый, но ни у одного нет волос того цвета, на который указывает фамилия», заметил брюнет. «Ты прав», сказал Белов. Какой цвет волос у художника?*

Решение. Заполним таблицу, учитывая условия задачи. Получим следующее:

Фамилия	Цвет волос		
	блондин	брюнет	рыжий
Белов	-	-	+
Чернов	+	-	-
Рыжов	-	+	-

Ответ: из таблицы видно, что художник брюнет.

Пример 13. *В соревнованиях по плаванию три пловца –Михаил, Андрей и Валерий –пришли к финишу почти одновременно, и между болельщиками разгорелся спор. Один утверждал, что Михаил –второй, а Валерий –третий. Другой доказывал, что Михаил –третий, а Валерий –первый. Третий говорил, что Андрей –второй, а Валерий –первый. Когда судьи объявили результаты заплыва, оказалось, что каждый болельщик был прав только наполовину. Как распределились места?*

Решение. Мы не знаем, какая половина каждого высказывания верна, а какая – нет. Поэтому мы можем сделать предположение.

1-й случай. Пусть в высказывании первого болельщика утверждение «Михаил – второй» –истинно, а «Валерий – третий» –ложно. Тогда второй болельщик ошибается, утверждая, что Михаил – третий, и говорит правду, доказывая, что Валерий – первый. Это значит, что в утверждении третьего болельщика вторая половина – «Валерий – первый» – истинна, а первая –«Андрей – второй» – ложна. Получается, что Валерий занял первое место, Михаил – второе, а Андрей приплыл к финишу третьим.

2-й случай. Пусть в высказывании первого болельщика утверждение «Михаил – второй» – ложно, а «Валерий – третий» – истинно. Тогда второй болельщик ошибается, утверждая, что Валерий – первый и говорит правду, заявляя, что Михаил – третий. Получается, что и Валерий, и Михаил приплыли к финишу третьими. Но Андрей не может быть одновременно первым и вторым. Получили противоречие. Кроме того, если проанализировать высказывание третьего болельщика, то получится ещё одно противоречие. Так как Валерий не может быть первым, то утверждение «Андрей – второй» истинное. Выходит, что ни один из спортсменов не был первым.

Задания для самостоятельной работы

1. В кругу сидят четыре котёнка: Барсик, Дымок, Васька и Тимофей. Их цвета: белый, серый, рыжий и чёрный. Барсик не рыжий, Дымок сидит между белым и чёрным котятами. Между Дымком и рыжим котёнком сидит Тимофей. Тимофей не белый. Определите цвет каждого котёнка.

2. На столе лежат в ряд четыре фигуры: треугольник, круг, прямоугольник и ромб. Они окрашены в разные цвета: красный, синий, жёлтый и зелёный. Известно, что красная фигура лежит между зелёной и синей; справа от жёлтой фигуры лежит ромб; круг лежит правее и треугольника и ромба; треугольник не лежит с краю, синяя и жёлтая фигуры не лежат рядом. Определите цвет и порядок расположения фигур.

3. Три подруги –Надя, Валя и Маша –вышли гулять в белом, красном и чёрном платьях. Туфли их были тех же трёх цветов, но только у Нади цвета туфель и платья совпадали. При этом у Вали ни платье, ни туфли не были чёрными, а Маша была в красных туфлях. Определите цвета платьев и туфель каждой из них.

4. Четверо друзей – Дима, Миша, Лёня и Максим – получили в подарок по котёнку. Их назвали Пушок, Елисей, Фантик и Мурлыка. Каждый из ребят выбрал себе котёнка любимого цвета. На расспросы они ответили следующее:
– Фантик нерыжий, а Мурлыка несерый.
– Пушок небелый, а Елисей несерый.
– Миша выбрал чёрного котёнка, а Максим – Мурлыку.
– Лёня взял Елисея, а Дима – белого котёнка.
– Пушок несерый, и Дима невзял Фантика.
Какого цвета котёнок у каждого из друзей, если во всех высказываниях одно утверждение истинно, а другое нет?

5. В небольшой деревушке жили лесорубы, охотники и рыбаки. Лесорубы всегда говорили правду, охотники, если им задавали несколько вопросов, отвечали поочерёдно то правду, то неправду (в ответ на первый вопрос они могут сказать и неправду), рыбаки всегда говорили неправду. За круглым столом сидели трое жителей деревни в таком порядке (по часовой стрелке): Боб, Дик и Пит. Приезжий задал всем по очереди три вопроса: 1. Кто Ваш сосед слева? 2. Кто Ваш сосед справа? 3. Кто Вы?

Вот как они ответили на эти вопросы.

Боб: 1.Рыбак. 2.Охотник. 3.Лесоруб.

Дик: 1.Охотник. 2.Охотник. 3.Лесоруб.

Пит: 1. Рыбак. 2.Лесоруб. 3.Лесоруб.

Кем на самом деле были Боб, Дик и Пит?

6. Журналист прибыл в аэропорт, чтобы побеседовать с Фёдоровым, Григорьевым и Даниловым – лётчиком, бортинженером и штурманом одного самолёта. Знакомый пилот сообщил ему следующие факты.

– Данилов не лётчик.
– Фёдоров не бортинженер.
– Данилов не бортинженер.
– Григорьев не штурман.

Когда журналист начал беседовать с экипажем, выяснилось, что из всех четырёх фактов соответствует действительности только один. Какая специальность у каждого члена экипажа?

Задачи на части числа

Многие из вас слышали такую задачу: «Гиря весит 1кг и ещё половину массы гири. Сколько кг весит гиря?»

Часто в ответе получают 1,5 *кг*. При этом рассуждают так: гиря весит 1 *кг* и ещё половину от 1 *кг*, следовательно, масса всей гири 1,5 *кг*. Это неверно. Правильный ответ 2 *кг*. Поскольку 1 *кг* составляет половину массы гири, то вся масса равна 2 *кг*.

Задачи по теме «Части числа» можно классифицировать по методам решения следующим образом:

1. Задачи, решаемые с конца.
2. Задачи на деление нечётного количества предметов.
3. Геометрические методы решения задач на части.

При этом решение таких задач полезно сопровождать рисунками или таблицами.

Пример 14. *Я задумал число, прибавил к нему 5, потом разделил сумму на 3, умножил на 4, отнял 6, разделил на 7 и получил число 2. Какое число я задумал.*

Решение. Расположим все действия, которые производятся в задаче, в порядке, котором они выполняются:

$$\bigcirc \xrightarrow{+5} \bigcirc \xrightarrow{:3} \bigcirc \xrightarrow{\times 4} \bigcirc \xrightarrow{-6} \bigcirc \xrightarrow{:7} \textcircled{2}$$

А теперь выполним все «противоположные» действия с цифрой «2», двигаясь справа налево, получим:

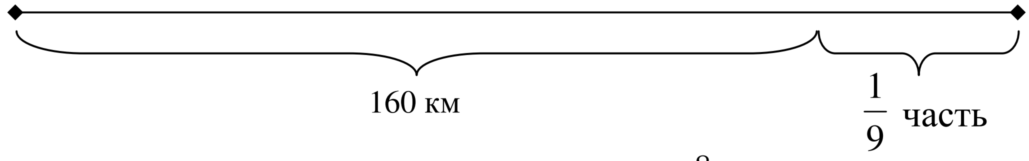
- последним действием является «деление», значит мы будем выполнять «умножение», т.е. 2×7=14,
- далее вместо «вычитания» с полученным числом произведем «сложение», т.е. 14+6=20,
- затем вместо «умножения» разделим 20 на 4, получим 20:4=5,
- далее вместо «деления» число 5 «умножим» на 3 и получим 5×3=15,
- и, наконец, вместо «сложения» из полученного результата «вычтем» 5 и получим окончательный ответ 15-5=10.

Проверим правильность полученного результата:

$$10 \xrightarrow{+5} 15 \xrightarrow{:3} 5 \xrightarrow{\times 4} 20 \xrightarrow{-6} 14 \xrightarrow{:7} 2$$

Пример 15. *Мотоциклист проехал 160 км и ещё* $\frac{1}{9}$ *часть всего пути. Чему равен весь путь?*

Решение. При решении таких задач полезно сделать чертёж.



По рисунку видно, что 160 км составляет $\frac{8}{9}$ части всего пути и на $\frac{1}{9}$ часть пути приходится 20 км. Следовательно, весь путь составит 160+20=180 км.

Пример 16. *Весы пришли в равновесие, когда на одну чашу поставили гири по 2 кг, а на другую – по 5 кг, а всего 14 гирь. Сколько тех и других гирь поставили на весы?*

Решение. Будем подбирать количество гирь каждого вида до тех пор, пока весы не «покажут» одинаковый вес. Результаты вычислений можно занести в таблицу. В начале решения возьмем количество гирь каждого вида поровну и посчитаем из вес.

Кол-во гирь по 2 кг	Кол-во гирь по 5 кг	Масса гирь по 2 кг	Масса гирь по 5 кг
7	7	14	35

Видно, что масса гирь по 5 кг значительно превышает массу гирь по 2 кг. А значит надо уменьшать количество гирь по 5 кг и увеличивать количество гирь по 2 кг. Получим следующие результаты.

Кол-во гирь по 2 кг	Кол-во гирь по 5 кг	Масса гирь по 2 кг	Масса гирь по 5 кг
7	7	14	35
8	6	16	30
9	5	18	25
10	4	20	20

Из таблицы видно, что следует взять 10 гирь по 2 кг и 4 гири по 5 кг.

Задания для самостоятельной работы

1. Мама купила яблоки для троих своих детей. Дети должны поделить эти яблоки поровну между собой. Первым пришёл из школы старший сын, взял себе третью часть и ушёл гулять. Второй пришла сестра и, думая, что она пришла первой, взяла себе третью часть и ушла. Последним пришёл младший брат и взял третью часть остатка. После этого осталось 8 яблок. Сколько яблок было всего? Как дети должны поделить оставшиеся яблоки?

2. Дорога от дома до хозяйственного магазина занимает у Пети 40 мин. Однажды по дороге в магазин он вспомнил, что забыл дома список покупок.

Если он пойдёт дальше, то придёт за 15 мин до обеденного перерыва. Если вернётся обратно, то опоздает на 5 мин. Какую часть пути успел пройти Петя?

3. Дама сдавала в багаж: рюкзак, чемодан, саквояж.
– Чемодан и рюкзак вместе весят 12 кг.
– Чемодан и саквояж – 15 кг.
– Саквояж и рюкзак – 9 кг.
Сколько весит каждый предмет в отдельности?

4. Однажды черт предложил бездельнику заработать. “Как только ты перейдешь через этот мост, – сказал он, – твои деньги удвоятся. Можешь переходить по нему сколько хочешь раз, но после каждого перехода отдавай мне за это 24 рубля”. Бездельник согласился и … после третьего перехода остался без денег. Сколько денег у него было сначала?
5. Группа туристов отправилась в поход. В первый день они прошли 1/3 пути, в второй – 1/3 остатка, в третий – 1/3 нового остатка. В результате им осталось пройти 32 км. Сколько километров был маршрут туристов?

6. Трое мальчиков имеют по некоторому количеству яблок. Первый мальчик дает другим столько яблок, сколько каждый из них имеет. Затем второй мальчик дает двум другим столько яблок, сколько каждый из них теперь имеет; в свою очередь и третий дает каждому из двух других столько, сколько есть у каждого в этот момент. После этого у каждого из мальчиков оказывается по 8 яблок. Сколько яблок было у каждого мальчика вначале?

7. Отец решил отдать сына в учебу и спросил учителя: "Скажи, сколько учеников у тебя в классе?" Учитель ответил: "Если придет еще учеников столько же, сколько имею, и полстолько, и четвертая часть, и твой сын, тогда будет у меня сто учеников". Сколько же учеников было в классе?

8. Мальчик прочитал книгу за 3 дня. В первый день он прочитал 0,2 всей книги и еще 16 страниц, во второй день 0,3 остатка и еще 20 страниц. В третий – 0,75 нового остатка и последние 30 страниц. Сколько страниц в книге?

ДЕЛИМОСТЬ

Введение

Понятие делимости – это одно из основных понятий арифметики и теории чисел, связанное с операцией деления. Мы будем говорить о делимости целых чисел и в частных случаях - о делимости натуральных чисел. Итак, дадим представление о делимости на множестве целых чисел.

Вопросами делимости чисел люди интересовались очень и очень давно. Благодаря многолетнему труду математиков над проблемами делимости чисел были разгаданы многие ее тайны, но и сейчас в этом разделе математики остается еще много неясного.

Решая задачи и выполняя действия на деления, не всегда удается число разделить нацело. Возникает необходимость предсказать – делится число нацело или нет. Поэтому в математике исследуются условия делимости, выводятся определенные правила и признаки, по которым можно определить делится ли натуральное число на другое натуральное число или нет.

Чтобы ответить на вопрос о том, делится ли целое число a на целое число b, можно произвести деление этих чисел. Но при решении некоторых задач это может оказаться очень трудоёмким делом. Поэтому удобно знать некоторые признаки, которые позволяют без выполнения деления определять, делится одно целое число на другое или нет.

Понятие делимости чисел

Разделить число a на число b – это значит найти такое число q, при умножении которого на b получается a, т.е. $b{\cdot}q = a$. Если для целых чисел a и b такое число q существует, то говорят, что a делится на b.

Определение. Целое число *a делится на целое число b*, не равное нулю, если существует целое число q, такое, что $a = b{\cdot}q$. В том случае, когда a делится нацело на b, число a называется *кратным* числу b, а число b называется **делителем** числа a.

Пример 17. *Число 45 делится нацело на число 9, т.к. существует натуральное число 5, такое, что выполняется равенство $9{\cdot}5=45$. Число 73 не делится на 9, т.к. не существует такое целое число q, при котором выполняется равенство $9{\cdot}q=73$.*

Тот факт, что целое число a является кратным целого числа b (a кратно b, или a делится на b), записывают с помощью символа «$\vdots$», в виде $a \vdots b$. Например, запись $972 \vdots 9$ означает, что целое положительное число 972 делится на 9.

Свойства делимости

Чтобы узнать, делится ли одно число на другое нацело, можно просто разделить первое число на второе. Если при делении остатка не будет, значит, числа делятся нацело. Если же при делении получится остаток, не равный нулю, значит, эти числа нацело не делятся. Можно ли, не производя самого деления, установить, делится ли одно число на другое нацело?

Можно, так как делимость одних чисел связана с делимостью других. Поэтому надо найти такие свойства делимости, при помощи которых было бы

возможно, не производя деления, установить, является ли данное число кратным другому.
Делимость суммы: Если каждое слагаемое суммы делится на одно и то же число, то и сумма делится на это число.
Делимость разности: Если уменьшаемое и вычитаемое делятся на одно и то же число, то и разность делится на это число.
Делимость произведения: Если в произведении нескольких натуральных чисел хотя бы один из сомножителей делится на какое-то число, то и всё произведение делится на это число.

Пример 18. *Числа 180 и 210 делятся на 3. Разделится ли сумма, разность и произведение этих чисел на 3?*
Решение.
1) $180 + 210 = 10 \cdot 18 + 10 \cdot 21 = 10 \cdot (18 + 21) = 10 \cdot 39$
39 делится на 3. А это значит, что сумма чисел 180 и 210 делится на 3.
2) $210 - 180 = 10 \cdot 21 - 10 \cdot 18 = 10 \cdot (21 - 18) = 10 \cdot 3$
Значит, разность 210 и 180 делится на 3.
3) $180 \cdot 210 = 3 \cdot 60 \cdot 210$
Полученное равенство показывает, что число $180 \cdot 210$ делится на 3.

Задания для самостоятельной работы

1. Можно ли утверждать, что $a+b$, $a-b$ и $a \cdot b \;\vdots\; m$, если а) $a \vdots m$ и $b \not\vdots\, m$, б) $a \not\vdots\, m$ и $b \not\vdots\, m$?

2. Верно ли, что если $a \vdots m$ и $b \vdots n$, то $ab \vdots mn$?

3. Петя считает, что если a^2 делится на $a-b$, то b^2 делится на $a-b$.

4. Дробь $\frac{a}{b}$ сократима. Сократима ли дробь $\frac{a-b}{a+b}$?

5. Вася берёт любое трёхзначное число, вычитает из него число, записанное теми же цифрами в обратном порядке и утверждает, что разность делится на 9. Прав ли он?

6. Маша показывает такой фокус: ей называют любое трёхзначное число, она приписывает к нему такое же, а потом в уме за секунду делит получившееся шестизначное число на 1001. Как она это делает?

7. Коля заметил, что суммы 1 + 2, 2 + 3, 3 + 4 — нечётные числа. Сформулируйте общее утверждение и докажите его.

8. Каким свойством обладает а) сумма двух последовательных нечётных чисел, б) сумма двух последовательных чётных чисел? Придумайте три свои суммы и найдите их свойства.

9. При каких *n* а) $7^n - 1 \vdots 6$, б) $15^n - 1 \vdots 7$, в) $2^n + 3^n \vdots 5$, г) $2^{2n} - 1 \vdots 3$?

10. При каких *n* произведение $n(n+1)$ делится на 2? На какое наибольшее число делится $n(n+1)(n+2)$ при любом натуральном *n*? А $n(n+1)(n+2)(n+3)$?

Сколько скобок такого вида надо перемножить, чтобы результат при любом n делился на 120? На 720?

Признаки делимости

Признаки делимости — особенности чисел, которые помогают быстро определить, делится ли данное число на другое. Знание этих признаков необходимо при решении многих арифметических задач.

Рассмотрим некоторые признаки делимости чисел и оформим их в виде таблицы.

Признак делимости	***Правило***	***Примеры***
Признак делимости на 2	Число делится на 2, если его последняя цифра четная или нуль	• число 52738 делится на 2, т.к. последняя цифра 8 - четная; • число 7691 не делится на 2, т.к. 1 - цифра нечетная.
Признак делимости на 3	На 3 делятся только те числа, у которых сумма цифр делится на 3	• Число 17835 делится на 3, т.к. сумма его цифр 1 + 7 + 8 + 3 + 5 = 24 делится на 3; • Число 105499 не делится на 3, т.к. сумма его цифр (29) не делится на 3.
Признак делимости на 4	Число делится на 4, если две последние его цифры нули или образуют число, делящееся на 4	• 31700 делится на 4, т.к. оканчивается двумя нулями; • 215634 не делится на 4, т.к. последние две цифры дают число 34, не делящееся на 4.
Признак делимости на 5	На 5 делятся числа, последняя цифра которых 0 или 5	• 240 делится на 5 (последняя цифра 0); • 554 не делится на 5 (последняя цифра 4)
Признак делимости на 6	Число делится на 6, если оно одновременно делится на 2 и на 3	• 126 делится на 6, т.к. оно делится и на 2 и на 3; • 122 не делится на 6, т.к. оно делится на 2, но не делится на 3.

Признак делимости на 7	Разобьем число справа налево на грани, по три цифры в каждой грани. Число делится на 7, если разность суммы чисел в гранях, стоящих на четных местах, и суммы чисел в гранях, стоящих на нечетных местах, делится на 7	• число 159213608421 делится на 7, т.к. 421 + 213=634, 608 + 159 = 767 и разность 767 - 634 = 133 делится на 7
Признак делимости на 8	Число делится на 8, если три последние цифры его нули или образуют число, делящееся на 8	• 170004 не делится на 8 (три последние цифры дают число 4, не делящееся на 8); • 111120 делится на 8 (три последние цифры дают число 120, делящееся на 8).
Признак делимости на 9	На 9 делятся только те числа, у которых сумма цифр делится на 9	• Число 17835 не делится на 9, т.к. сумма его цифр 1 + 7 + 8 + 3 + 5 = 24 не делится на 9; • Число 52632 делится на 9, т.к. сумма его цифр (18) делится на 9.
Признак делимости на 10, 100 и 1000	На 10 делятся только те числа, последняя цифра которых нуль, на 100 - только те числа, у которых две последние цифры нули, на 1000 - только те, у которых три последние цифры нули	• 8200 делится на 10 и на 100; • 542000 делится на 10, 100, 1000.

Признак делимости на 11	На 11 делятся только те числа, у которых сумма цифр, занимающих нечетные места, либо равна сумме цифр, занимающих четные места, либо разнится от нее на число, делящееся на 11	• Число 103785 делится на 11, т.к. сумма цифр, занимающих нечетные места, 1+3+8=12 равна сумме цифр, занимающих четные места 0+7+5=12; • Число 9163627 делится на 11, т.к. сумма цифр, занимающих нечетные места, есть 9 + 6 + 6 + 7 = 28, а сумма цифр, занимающих четные места, есть 1 + 3 +2 =6; разность между числами 28 и 6 есть 22, а это число делится на 11; • Число 461025 не делится на 11, т.к. числа 4+ 1 + 2 = 7 и 6 +0 + 5=11 не равны друг другу, а их разность 11 -7 = 4 на 11 не делится.
Признак делимости на 12	Число делится на 12, если оно одновременно делится на 4 и на 3	• 324 делится на 12, т.к. • 620 не делится на 12, т.к. оно делится на 4, но не делится на 3.
Признак делимости на 13	число делится на 13, если результат вычитания последней цифры умноженной на 9 из этого числа без последней цифры делится на 13	• 858 делится на 13, т.к. 85 - $9 \cdot 8 = 13$ делится на 13; • 620 не делится на 12, т.к. оно делится на 4, но не делится на 3.
Признак делимости на 25	На 25 делятся числа, две последние цифры которых нули или образуют число, делящееся на 25 (т.е. числа, оканчивающиеся на 00, 25, 50 или 75)	• 7150 делится на 25 (оканчивается на 50), • 4855 не делится на 25 (оканчивается на 55);

Как видно из вышеперечисленного, можно предположить, что к любому из натуральных чисел можно подобрать свой индивидуальный признак делимости или же "составной" признак, если число кратно нескольким разным числам. Но как показывает практика, в основном чем больше число, тем сложнее его признак.

Задания для самостоятельной работы

1. Какие из данных чисел 384123, 108675, 138963, 903150 делятся на: 3; на 4; на 9; на 25?
2. Какие из данных чисел 7194, 18456, 36735, 17214, 781120 делятся: на 6; на 15; на 12?
3. К числу 43 припишите справа и слева по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 45
4. Вместо звёздочек поставьте некоторые числа так, чтобы число 5*4* делилось на 9 и на 4. Найдите все возможные решения.
5. Делится ли на 81 число, записанное 81 единицей?
6. Цифры трехзначного числа записали в обратном порядке и из большего вычли меньшее. Докажите, что разность делится на 9 и на 11.
7. Выписали подряд все цифры от 1 до 9 включительно, а затем от 9 до 1. Будет ли полученное число делиться на 9?
8. Выписали подряд натуральные числа, начиная с 1 и заканчивая числом 11. Будет ли полученное число кратно 9?
9. Комбинируя известные признаки делимости, сформулируйте три новых.
10. В числе 65432789 вычеркните наименьшее число цифр так, чтобы оставшееся число делилось на 36.
11. Петя заметил, что если из числа вычесть сумму его цифр, то получится число, кратное 9. Докажите этот факт.
12. Верно ли, что если число $a + 4b$ делится на 13, то и число $10a + b$ делится на 13?

Мендель Виктор Васильевич, к. ф.-м. н.,
директор педагогического института ТОГУ

ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ИЗБРАННЫХ ЗАДАЧ ПЛАНИМЕТРИИ

Введение

При решении многих задач планиметрии возникают различные конфигурации, в которых участвуют треугольник и окружность. Знание наиболее распространенных комбинаций и их свойств позволяет получать короткие и красивые решения сложных на первый взгляд задач. К таким конструкциям в первую очередь относятся «треугольник и описанная окружность», «треугольник и вписанная окружность», которые довольно подробно изучаются в школьном курсе, в меньшей степени изучаются конструкции «треугольник и вневписанная окружность», «треугольник и окружность, проходящая через две его вершины», «треугольник и окружность, касающаяся двух его сторон» и другие.

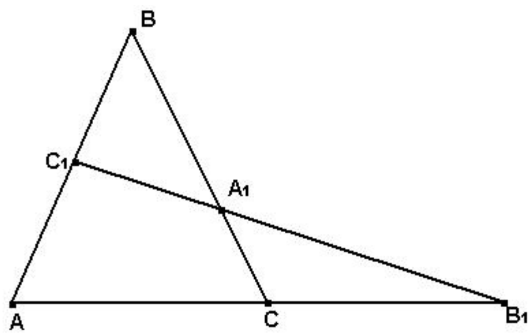
Взгляд на планиметрию через призму конструкций дает нам возможность по-новому посмотреть на хорошо знакомый материал, связать его с новыми знаниями, укрепив их через практическое применение к решению задач.

Кроме того, мы особое внимание уделим решению задач на доказательство, имеющих свою собственную специфику.

Часть 1. Вспомогательные конструкции и их свойства

В этой части мы рассмотрим некоторые важные конфигурации, в которых участвуют треугольник, окружность, прямая или угол.

Треугольник и секущая, теорема Менелая



Секущей будем называть прямую, которая пересекает некоторую геометрическую фигуру: треугольник, окружность, угол и т.п. Иногда удобно брать не только точки пересечения фигуры и секущей, но и некоторые дополнительные точки: например, точку пересечения прямой, на которой лежит сторона треугольника и секущей.

Рассмотрим секущую треугольника. К ней относится одна замечательная теорема: ***теорема Менелая***, которая связывает отношения длин отрезков, на которые секущая делит стороны треугольника.

Теорема Менелая. *Пусть ΔABC пересечен прямой, не параллельной стороне AC и пересекающей две его стороны AB и BC соответственно в точках C_1 и A_1, а прямую AC в точке B_1 тогда*

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1. \qquad (1)$$

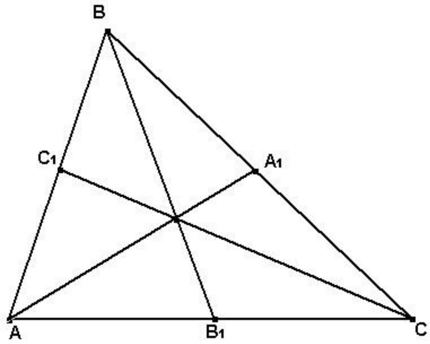
Справедлива также обратная теорема Менелая.

Теорема, обратная теореме Менелая. *В треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 принадлежат прямым BC, AC, AB соответственно, тогда если*

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1,$$

то точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.

Упражнение 1. *Докажите теорему Менелая.* (**Указание:** опустите на секущую перпендикуляры из вершин треугольника и рассмотрите пары получившихся подобных прямоугольных треугольников. Заменив в (1) отношения гипотенуз на отношения соответствующих катетов и выполнив сокращения, получите нужный результат.)



Упражнение 2. *Докажите теорему, обратную теореме Менелая.* (**Указание:** воспользуйтесь методом «от противного». Предположите, что, например, точка A_1 не лежит на секущей. Тогда секущая пересечет сторону BC в некоторой точке A_2, для которой выполнена прямая теорема Менелая. Далее самостоятельно получите противоречие.)

Треугольник и точка, теорема Чевы

Второй интересной конструкцией, которую мы рассмотрим, является треугольник, у которого три отрезка, проведенных из вершин на противоположные стороны или их продолжения, пересекаются в одной точке.

Свойства этой конструкции описывает теорема Чевы.

Теорема Чевы. *В произвольном треугольнике ABC на сторонах BC, CA, AB или их продолжениях взяты соответственно точки A_1, B_1, C_1. Если прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в некоторой внутренней точке Z треугольника ABC то выполнено условие*

$$\frac{BA_1}{CA_1}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}\cdot\frac{AC_1}{BC_1}=1. \qquad \mathbf{(2)}$$

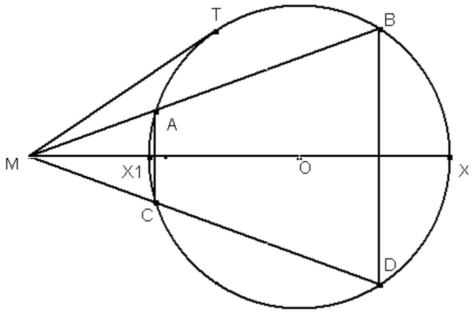
Так же, как и в случае теоремы Менелая, для теоремы Чевы справедливо обратное утверждение.

Теорема, обратная теореме Чевы. *Если в произвольном треугольнике ABC на сторонах BC, CA, AB или их продолжениях взяты соответственно точки A_1, B_1, C_1, для которых выполнено условие*

$$\frac{BA_1}{CA_1}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}\cdot\frac{AC_1}{BC_1}=1,$$

то прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

Упражнение 3. *Докажите теорему Чевы.* (**Указание:** попробуйте записать условие теоремы Менелая для треугольников ABB_1 и B_1BC и секущих CC_1 и AA_1, а затем исключите из этих равенств «лишние» отрезки.)



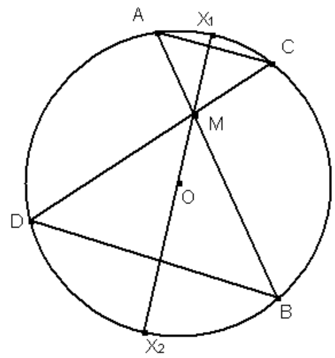
Упражнение 4. *Докажите теорему, обратную теореме Чевы.* (**Указание:** вновь используйте метод доказательства «от противного».)

Вписанный угол. Теорема синусов

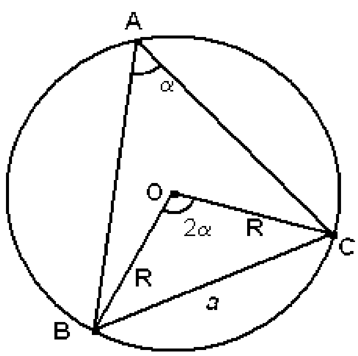
Свойства угла, вписанного в окружность, подробно изучаются в школьном курсе геометрии. Тем не менее, эта конструкция достойна отдельного упоминания, так как из нее можно получить очень полезное доказательство теоремы синусов.

Теорема о вписанном угле. *Величина угла, вписанного в окружность, равна половине величины центрального угла, опирающегося на ту же дугу.*

Теорема синусов. *В произвольном треугольнике отношения длин сторон треугольника к синусам противолежащих углов есть постоянная величина, равная диаметру описанной вокруг этого треугольника окружности.*



Упражнение 5. *Докажите теорему синусов.* (**Указание:** воспользуйтесь рисунком и выразите длину хорды (стороны треугольника) через радиус окружности и величину центрального угла.)



Окружность и касательная, окружность и секущая. Теоремы о свойствах секущих

Вспомогательная конструкция «окружность – секущая» часто встречается в разных задачах. Более того, она связана с важным понятием «степень точки относительно окружности». Подробно об этом можно прочитать в методической разработке по математике для слушателей летней школы ХКЗФМШ-2005.

Мы рассмотрим только несколько конструкций, которые для удобства собраны на одном чертеже.

Перечислим некоторые их свойства.

Свойство 1. *Длины отрезков касательных, проведенных к одной окружности из одной точки M равны* ($MT^2=MO^2-R^2$).

Свойство 2. *Произведения отрезков двух секущих к одной окружности равны* ($MA\cdot MB= MC\cdot MD$).

Свойство 3. *Произведение отрезков внешней секущей равно квадрату отрезка касательной, проведенной из той же точки* ($MA\cdot MB=MT^2=MO^2-R^2$).

Далее рассмотрим случай, когда *точка расположена внутри окружности*.

Свойство 4. (аналог свойства 2) *Произведения отрезков двух секущих к одной окружности равны* ($MA\cdot MB= MC\cdot MD$).

Свойство 5. (аналог свойства 3) *Произведение отрезков внутренней секущей равно разности квадратов радиуса и расстояния от точки до центра окружности* ($MA\cdot MB=R^2-MO^2$).

Упражнения 6 – 10. *Докажите свойства 1-5.*

Часть 2. Основные конструкции

В этой части мы рассмотрим основные конструкции, которые образуют треугольник и окружность.

Треугольник и описанная окружность

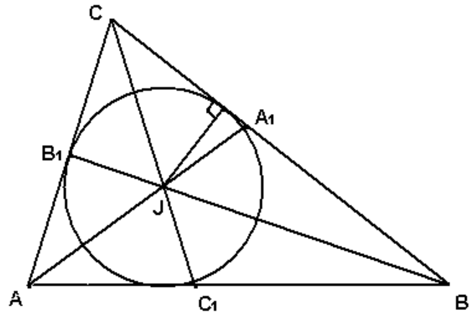
Центр описанной окружности лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

У *остроугольного* треугольника эта точка находится внутри, у *прямоугольного* – на середине гипотенузы, а у *тупоугольного* – вне треугольника.

Упражнение 11. *Докажите, что если два треугольника имеют общую сторону, то прямая, проходящая через центры описанных окружностей этих треугольников делит такую сторону пополам (проходит через середину стороны).*

Из *теоремы о вписанном угле* следует, что из центра описанной окружности каждая сторона видна под углом, в два раза большем, чем противолежащий угол треугольника. Используйте это свойство для решения следующего упражнения.

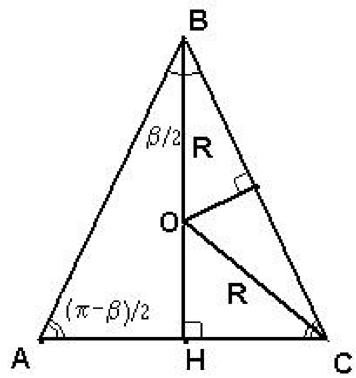
Упражнение 12. *Выразить стороны треугольника через его углы и радиус описанной окружности.*



Упражнение 13. *Докажите для произвольного треугольника следующую формулу:* $R = \frac{abc}{4S}$, *здесь a, b и c – стороны, R – радиус описанной окружности, S – площадь треугольника.* (**Указание:** используйте выражение для стороны с из предыдущего упражнения и формулу для площади треугольника $S = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$.)

Частные случаи: прямоугольный, равнобедренный и равносторонний треугольник

Как уже отмечалось выше, у прямоугольного треугольника центр описанной окружности лежит на середине гипотенузы. Отсюда следует, что *радиус описанной вокруг прямоугольного треугольника окружности равен половине его гипотенузы*.



Справедлива также следующая теорема.

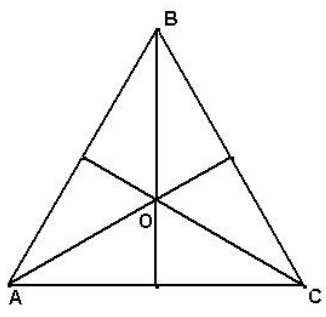
Теорема. *Если радиус описанной окружности некоторого треугольника равен половине длины одной из его сторон, то этот треугольник – прямоугольный.*

Упражнение 14. *Докажите теорему.* (**Указание:** покажите, что центр описанной окружности лежит на середине стороны треугольника, и найдите синус противоположного угла с помощью теоремы синусов.)

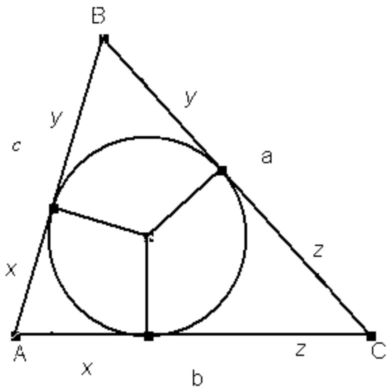
Рассмотрим теперь равнобедренный треугольник. Так как высота, проведенная к основанию такого треугольника, одновременно является серединным перпендикуляром и биссектрисой, то центр описанной окружности лежит на высоте (или ее продолжении).

Упражнение 15. *Выразите отношение радиуса описанной окружности равнобедренного треугольника к его высоте через угол при вершине этого треугольника.*

Рассмотрим, наконец, равносторонний или правильный треугольник. В этом треугольнике высоты являются медианами, биссектрисами и серединными перпендикулярами. Поэтому центр описанной окружности совпадает с точкой пересечения медиан.



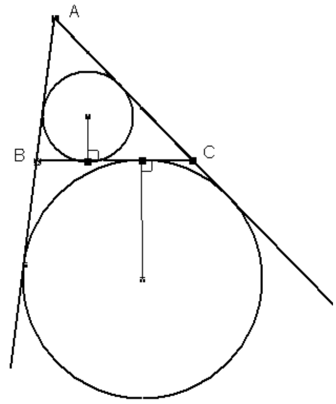
Так как точка пересечения медиан делит каждую из них в отношении 2 к 1 считая от вершины, то радиус описанной окружности равен двум третьим от высоты. Таким образом, $R = \frac{\sqrt{3}}{3}a$, где a – сторона треугольника.



Упражнение 16. *Выразите высоту, сторону и площадь равностороннего треугольника через радиус описанной окружности.*

Треугольник и вписанная (вневписанная) окружность

Центр *вписанной* окружности лежит на пересечении биссектрис внутренних углов треугольника. Радиус этой окружности и точки касания можно определить, опустив перпендикуляр из центра на сторону. Довольно распространенной является такая ошибка: за точку касания окружности и стороны принимают точку пересечения стороны и биссектрисы.



Рассмотрим некоторые свойства описанного треугольника.

Пусть x, y, z – отрезки, на которые точки касания вписанной окружности делят стороны треугольника. Эти отрезки можно выразить через стороны треугольника, решив следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = c \\ y + z = a \\ x + z = b. \end{cases}$$

Получим:

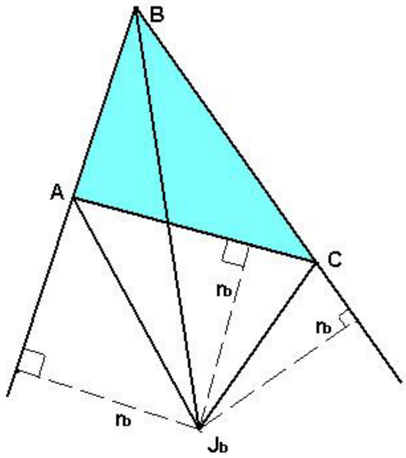
$$\begin{cases} 2x = b + c - a \\ 2y = a + c - b \\ 2z = a + b - c. \end{cases}$$

Упражнение 17. *Докажите, что отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания вписанной окружности, лежащими на противоположных сторонах, пересекаются в одной точке.*

Если вписанные окружности всем хорошо знакомы, то *вневписанными* встречаются реже. Поясним, чем они отличаются от вписанных.

Итак, *центр вневписанной* окружности лежит вне треугольника. Это точка пересечения биссектрис одного внутреннего и двух внешних углов треугольника.

Вневписанная окружность касается одной стороны и продолжений двух других сторон треугольника. Для треугольника существует три вневписанных окружности. (На рисунке изображены вписанная и вневписанная окружности. Хорошо видно, что точки касания этих окружностей со стороной треугольника не совпадают.)



Упражнение 18. *Выразите длины отрезков касательных, проведенных из вершин треугольника к вневписанной окружности, через длины сторон этого треугольника.* (**Указание:** используйте метод, который был применен к вписанной окружности.)

Найдем выражения для радиусов вписанной и вневписанных окружностей. Начнем со случая вписанной окружности. «Разрежем» треугольник на три треугольника так, как показано на рисунке. Каждый из них имеет высоту, равную радиусу вписанной окружности. Сумма площадей трех треугольников равна площади большого: $S = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}r(a+b+c) = \frac{1}{2}rP$. Отсюда легко получить формулу для вычисления радиуса вписанной окружности:

$$r = \frac{2S}{P}.$$

Радиусы вневписанных окружностей можно получить аналогично. Представим площадь треугольника ABC так:

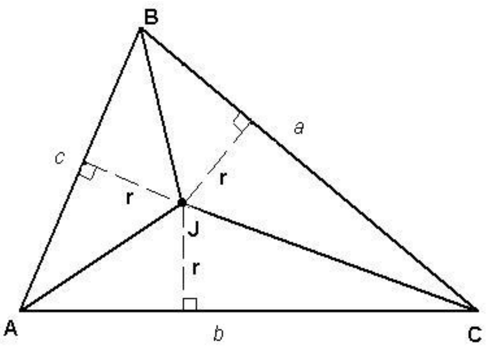
$$S = S_{ABJ_b} + S_{CBJ_b} - S_{ACJ_b}.$$

Далее применим те же рассуждения, что и ранее. В результате получим следующую формулу:

$$r_b = \frac{2S}{a+c-b}.$$

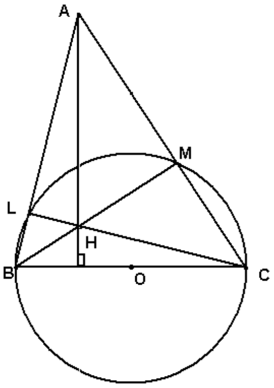
Упражнение 19. *Докажите, что прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания сторон или продолжений сторон этого треугольника с вневписанной окружностью, пересекаются в одной точке.* (**Указание**: используйте теорему Чевы.)

Расстояние между центрами описанной и вписанной (вневписанной) окружностей



Замечательный математик Леонард Эйлер вывел замечательную формулу, выражающую расстояние между центрами описанной и вписанной (вневписанной) окружностей треугольника. Вот она:

$OJ^2 = R^2 - 2Rr$ - для вписанной, и



$OJ_b^2 = R^2 + 2Rr_b$ - для вневписанной окружности.

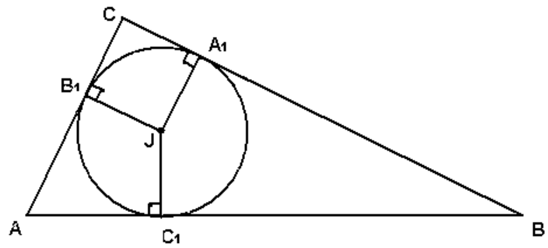
Между прочим, из первой формулы следует, что радиус вписанной окружности не менее чем в два раза меньше радиуса описанной окружности. Как мы увидим ниже, равенство выполняется только для равностороннего треугольника.

Частные случаи: прямоугольный, равнобедренный и равносторонний треугольник

Для прямоугольного треугольника имеется очень изящная формула, выражающая радиус вписанной окружности через его стороны:

$$2r = a + b - c\,.$$

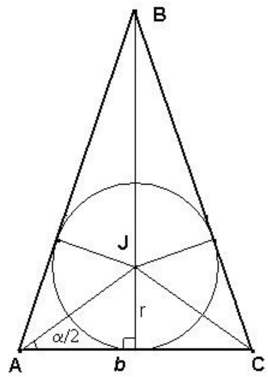
Упражнение 20. *Докажите эту формулу.* (**Указание:** покажите, что точки CA_1JB_1 являются вершинами квадрата, сторона которого равна радиусу вписанной окружности и примените формулы, выражающие отрезки касательных через стороны треугольника.)



Для радиуса вписанной окружности равнобедренного треугольника можно получить простое выражение через основание и угол при нем (смотри чертеж):

$$r = \frac{b}{2} tg \frac{\alpha}{2}.$$

Окружность, проходящая через две вершины треугольника



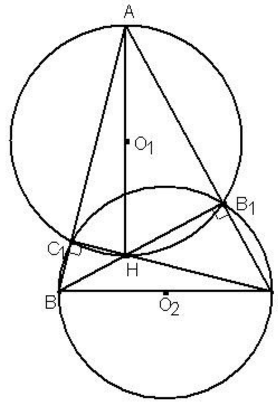
Чаще всего в геометрических задачах встречается конфигурация, в которой окружность проходит только через две вершины треугольника, при этом вторично пересекая две его стороны. В такой конструкции появляются два подобных треугольника ABC и AML, у которых соответственные стороны ML и BC – не параллельны.

Рассмотрим некоторые примеры, в которых появляется такая конструкция.

Пример 1. *Окружность, проходящая через две вершины и основания двух высот треугольника (В этом случае сторона АС будет диаметром окружности).*

В этой конфигурации коэффициент подобия треугольников равен косинусу угла при третьей вершине: $k = \cos\angle A$.

Упражнение 21. *Докажите сформулированное выше утверждение.* (**Указание:** выразите отрезки AM и AL через стороны треугольника и угол A.)



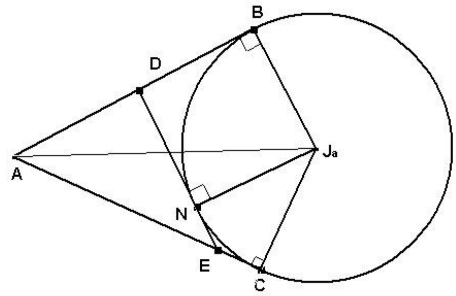
Взглянем на эту же конструкцию с другой стороны.

Пример 2. *Пусть одна из сторон треугольника (например, BC) является диаметром окружности, а L и M точки пересечения окружности с двумя другими сторонами. Тогда из этих точек диаметр окружности виден под прямым углом.*

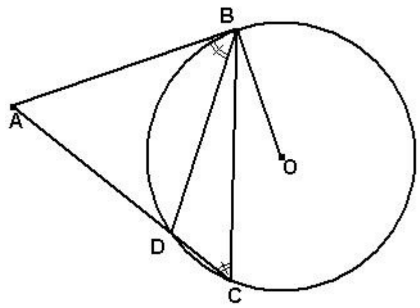
Нетрудно увидеть, что отрезки BM и CL являются высотами треугольника.

Упражнение 22. *Окружность, диаметром которой служит одна из сторон треугольника, пересекает другую сторону в точке, являющейся ее серединой. Докажите, что данный треугольник – равнобедренный.*

Окружность, касающаяся двух сторон треугольника



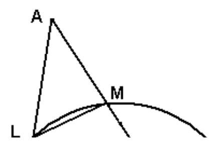
На математических олимпиадах нередко предлагаются задачи, в которых рассматриваются либо угол и вписанная в него окружность, либо равнобедренный треугольник, касающийся некоторой окружности в двух своих вершинах. При этом обычно присутствует еще один элемент: секущая угла, касающаяся окружности в некоторой точке. Наблюдательный читатель уже заметил, что описанная здесь конструкция – ни что иное, как треугольник и вневписанная окружность.

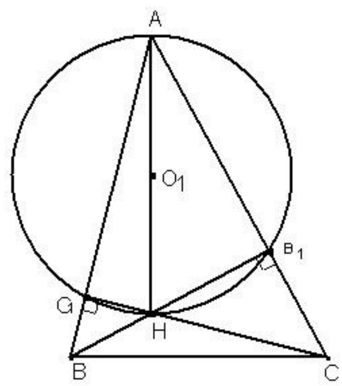


При решении задач бывает полезно следующее свойство, которое кажется очевидным: *длина отрезка DE равна сумме длин отрезков DB и EC*.

Окружность, касающаяся одной из сторон треугольника в вершине

Так как *угол между хордой и касательной к окружности равен половине центрального угла, опирающегося на хорду*, то изображенные на чертеже треугольники ABD и ABC имеют равные углы при вершинах B и C соответственно. А если учесть, что угол при вершине A у них общий, то нетрудно заметить, что два этих треугольника подобны.





Упражнение 23. *Дайте строгое доказательство сформулированного выше утверждения.*

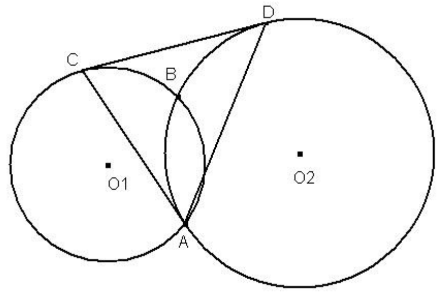
Еще раз о высотах треугольника

Через точку пересечения высот треугольника (ортоцентр), основания двух высот и третью вершину проходит окружность. *Отрезок АН является диаметром этой окружности.*

Рассмотрим теперь сразу две окружности, проходящие через основания высот.

Упражнение 24. *Докажите, что прямая O_1O_2 перпендикулярна прямой C_1B_1.*

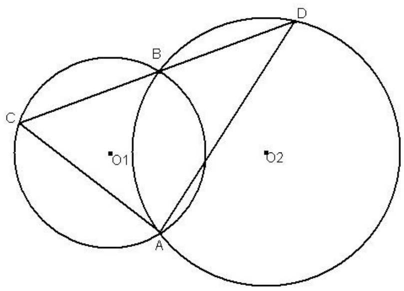
Продолжение темы о двух окружностях



С парой пересекающихся окружностей и треугольником связан ряд интересных конфигураций.

Первая конструкция. Две окружности пересекаются в точках А и В. Через точку В проведена секущая CD.

Упражнение 25. Докажите, что какая бы не была взята секущая, будут получаться подобные треугольники ACD.



Вторая конструкция. Две окружности пересекаются в точках А и В. CD – отрезок общей касательной к этим окружностям.

Упражнение 26. *Исследуйте свойства треугольника ACD. (Смотри чертеж.)*

Упражнение 27. *Выразите стороны треугольника ACD через радиусы окружностей и длину хорды АВ.*

Часть 3. Задачи на доказательство

Структура теоремы (или задачи на доказательство)

1. Классическая структура.

Наиболее привычной для школьника является следующая структура теоремы (формулировка):

Из ***условия 1, условия 2, … , условия n*** *следует справедливость* ***заключения****.*

Другими словами, из одновременного выполнения всех условий теоремы (их называют посылками) вытекает истинность заключения.

Рассмотрим примеры.

Задача 1. *Если ABCD – параллелограмм и его диагонали равны (AC=BD), то ABCD – прямоугольник.*

В этой теореме две посылки:

A= «ABCD – параллелограмм»;

B= «AC=BD».

И заключение: C= «ABCD – прямоугольник».

Формулировка задачи может быть представлена схемой:

«из A и B следует C».

Читателю понятно, что для доказательства теоремы, сформулированной по данной схеме, нужно построить цепочку рассуждений T_1, T_2, …, T_k, с помощью которых осуществляется переход от *условий* теоремы к ее *заключению*.

Остановимся подробнее на том, по каким правилам мы выбираем или придумываем рассуждения T_1, …, T_k.

Ну, во-первых, в качестве таких утверждений мы можем брать любое *условие* теоремы.

Во-вторых, мы можем взять любую известную *теорему* или *формулу* и применить ее к *условиям* задачи. Давайте вникнем в механизм этой операции:

фактически, мы ***подставляем*** в формулировку теоремы или в формулу те данные, которые содержатся в условиях.

Во «взрослой» математике такая операция называется «правилом подстановки».

Рассмотрим примеры применения этого правила.

Пример 1. *Решить квадратное уравнение* $x^2 - 10x + 24 = 0$

Решение. Используем известную формулу

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - ac}}{a}$$

и ***подставим*** в нее данные из задачи a=1, b=–10, c=36.

Получим результат подстановки:

$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{1}$, откуда $x_{1,2} = 5 \pm 1$ или $x_1 = 4$, $x_2 = 6$.

Пример 2. Рассмотрим вписанный в окружность четырехугольник $A_1A_2B_1B_2$. Известна следующая теорема: У вписанного в окружность четырехугольника суммы противоположных углов равны.

Сделаем ***подстановку*** в теорему конкретных условий задачи. В результате получим рассуждение: *В рассмотренном четырехугольнике* $A_1A_2B_1B_2$ $\angle A_1A_2B_1 + \angle B_1B_2A_1 = 180°$

Вернемся к правилам, по которым строятся рассуждения в доказательстве.

Третий способ получения утверждений в цепочке доказательства состоит в следующем:

на основе истинности уже полученных рассуждений (то есть каких либо из предыдущих T_1, …, T_k) делается заключение об истинности следующего рассуждения T_{k+1}.

Обычно применяется следующая схема: *«из верности рассуждения A и верности рассуждения «из A следует B» следует верность рассуждения B»*.

Это правило получило название «***правило заключения***». Открывший это правило древнегреческий философ и логик Аристотель назвал его «***modus ponens***».

Рассмотрим пример применения правила заключения.

Пример 3. A= «Данный четырехугольник ABCD – прямоугольный (AC и BD – его диагонали)» – условие.

B= «Если четырехугольник прямоугольный, то его диагонали равны» – известная теорема.

По правилу заключения получаем:

C= «У данного четырехугольника ABCD: AC=BD».

В математике существует еще ряд правил, позволяющих получать из известных рассуждений новые. Эти правила получили название «правила естественного вывода» или «производные правила вывода».

Подведем первый итог.

Итак, доказательство теоремы – это цепочка рассуждений T_1, …, T_k, в которой последнее рассуждение – суть заключение теоремы (то, что требуется доказать). Причем рассуждения T_i – это: либо ***условия*** теоремы, ***либо известные аксиомы, теоремы, формулы***, либо получены по ***правилам вывода*** (*правило подстановки, правило заключения и др.*) из предыдущих рассуждений.

2. Другие виды формулировок теорем

Кроме рассмотренной классической формулировки, существует еще ряд широко распространенных формулировок теорем. Рассмотрим примеры таких формулировок.

«Утверждение A выполняется тогда и только тогда, когда выполняется утверждение B».

«Утверждения A_1, A_2, …, A_n – эквивалентны (равносильны)».

Смысл этих формулировок очень схож. В них говорится о том, что утверждения A и B (A_1, A_2, …, A_n) одновременно истинны или одновременно ложны.

Фактически, в первой формулировке объединены две теоремы: *«Из утверждения A следует утверждение B»* (прямая теорема) и *«Из утверждения B следует утверждение A»* (обратная теорема).

Вторая формулировка также распадается на несколько классически сформулированных теорем.

Пример 4.

Теорема. «*Четырехугольник ABCD вписывается в окружность тогда и* *только тогда, когда суммы его противоположных углов равны 180°».*

Эта теорема распадается на две:

Прямая теорема. *Если четырехугольник вписан в окружность, то суммы его противоположных углов равны 180°.*

Обратная теорема. *Если суммы противоположных углов четырехугольника равны 180°, то он вписывается в окружность.*

Рассмотрим еще один, особый вид теорем, для доказательства которых часто применяется специфический метод – *метод математической индукции.*

Общая схема такова:

«*Доказать, что все объекты множества **М** обладают общим свойством **а***».

Примеры 5-7:

Доказать, что

5. *Все числа вида* $7^n + 3n - 1$ *делятся на 9.*
6. *Квадраты всех нечетных чисел при делении на 4 дают остаток 1.*
7. *Если сумма цифр целого числа делится на 9, то и само число делится на 9.*

О двух способах доказательства теорем

На страницах учебника вы встречаетесь в основном с ***классическими*** (по способу доказательства) доказательствами теорем. В этих доказательствах идет последовательный переход от одного рассуждения к другому, пока не получится утверждение теоремы.

Также весьма эффективен в математике способ доказательства «***от противного***». Чтобы дать его описание, нам потребуется уточнить, что такое ***противоречие***. Как правило, условия теоремы содержат несколько рассуждений A_1, A_2, … ,A_n. Если в ходе доказательства мы получим рассуждение «*Неверно, что выполняется* A_i», то будет получено ***противоречие***.

Суть его в том, что **одновременно** должны выполняться условие A_i и условие «***неверно, что*** A_i».

Метод доказательства «***от противного***» состоит в следующем:

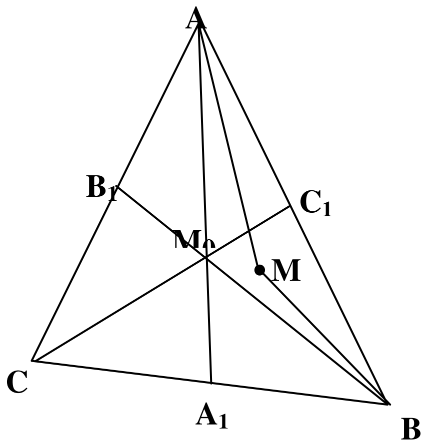
1. Предполагается, что вместо заключения теоремы (*утверждение В*), выполняется утверждение «*неверно, что В*».
2. Из утверждения «*неверно, что В*» и утверждений, содержащихся в условии теоремы выводится утверждение «*неверно, что* A_i» (где A_i – одна из посылок теоремы).

(Таким образом, получается ***противоречие***: одновременно должны выполняться условия A_i и «***неверно, что*** A_i»).

3. Делается вывод о том, что предположение о неверности *заключения В* приводит к противоречию, поэтому *заключение В* вытекает из условий теоремы.

Рассмотрим пример.

Пример 8. *Доказать, что если биссектрисы треугольника разбивают его на шесть равных по площади треугольников, то данный треугольник - правильный.*



Доказательство. 1. Предварительные рассуждения: очевидно, что треугольник правильный, если его биссектрисы одновременно являются и его медианами.

Так же понятно, что биссектриса, проходящая через точку пересечения медиан, является и медианой треугольника.

Поэтому мы должны доказать следующее: если три прямых, проходящих через вершины треугольника, пересекаются в одной его внутренней точке M и разбивают треугольник на шесть равных по площади, то M – точка пересечения медиан.

Рассмотрим теперь треугольник ABC, где AA_1, BB_1, CC_1 – медианы, а M_0 – точка их пересечения.

Заметим, что шесть треугольников с вершиной M_0 имеют одинаковую площадь.

Поэтому треугольники ABM_0, BCM_0 и ACM_0 так же имеют одинаковую площадь.

Теперь применим метод «***от противного***». Пусть точка M не совпадает с точкой M_0. Рассмотрим треугольники ABM, ACM и BCM. Из условия вытекает, что площади этих треугольников равны (площадь каждого равна 1/3 площади ΔABC).

Далее, точка M должна попасть внутрь или на сторону одного из треугольников ABM_0, ACM_0 или BCM_0 (предположим, что внутрь ABM_0).

Очевидно, что $S_{\Delta ABM}<S_{\Delta ABM0}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}$.

Итак, мы получили противоречие: с одной стороны, $S_{\Delta ABM}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}$, а с другой стороны, она меньше.

Из этого следует, что предположение о том, что M не совпадает с M_0 ошибочно, то есть M_0=M.

Итак, мы доказали, что биссектрисы проходят через точку пересечения медиан, то есть биссектрисы являются медианами, что верно только для правильных треугольников.

Другой способ доказательства, который мы рассмотрим – ***«метод математической индукции»***. Он применяется для доказательства утверждений вида: «Для всех объектов A_1, A_2, …, A_n, … выполняется условие *a*».

Суть метода в следующем:

1 шаг. Проверяется, что условие *а* выполняется для объекта A_1.

2 шаг. Предполагается, что условие *а* выполняется для объекта A_k.

3 шаг. Доказывается, что если условием *а* обладает объект A_k, то этим же свойством обладает объект A_{k+1}.

Рассмотрим пример.

Пример 9. *Доказать, что для всех натуральных n число* $a_n = 7^n + 3n - 1$ *делится на 9.*

Доказательство (***метод математической индукции***):

1. пусть n=1, тогда $a_1 = 7^1 + 3 \cdot 1 - 1 = 7 + 3 - 1 = 9$ – делится на 9.
2. предположим, что число $a_k = 7^k + 3k - 1$ делится на 9.
3. рассмотрим число $a_{k+1} = 7^{k+1} + 3(k+1) - 1 = 7 \cdot 7^k + 3k + 3 - 1 =$

$$= 7\left(7^k + 3k - 1\right) - 7(3k-1) + 3k + 2 = 7a_k - 21k + 7 + 3k + 2 = 7a_k - 18k + 9 = 7a_k + 9(1-2k)$$

Число $7a_k$ делится на 9 по индуктивному предположению (2) (так как делится a_k), второе слагаемое также делится на 9, поэтому вся сумма делится на 9, то есть a_{k+1} делится на 9.

Теорема доказана.

Приведем еще один пример (использование ***метода математической индукции*** в геометрии).

Пример 10. *Несколько прямых разбили плоскость на области (замкнутые или неограниченные). Докажите, что эти области можно раскрасить двумя красками так, что граничные области раскрашены в разные цвета (области называют граничными, если у них есть общая сторона или луч).*

Доказательство:

Проведем математическую индукцию по количеству прямых (n).

1. Пусть n=1 – одна прямая. Она делит плоскость на две полуплоскости. Одну выкрасим цветом №1, другую цветом №2.
2. Предположим, что для n=k прямых нужная раскраска существует.
3. Проведем еще одну прямую на уже имеющейся раскраске. Эта прямая делит плоскость на две полуплоскости. В одной полуплоскости оставим старую раскраску. В другой полуплоскости изменим раскраску таким образом: цвет №1 изменим на цвет №2, а цвет №2 на цвет №1 (убедитесь, что эта операция дает нам решение задачи).

Задачи для самостоятельного решения

1. Две окружности внешне касаются в точке *A*, *BC* - их общая внешняя касательная. Доказать, что $\angle BAC = 90^o$.

2. Две окружности пересекаются в точках *A* и *B*. Точки *A* и *B* лежат по разные

стороны от прямой l, которая пересекает окружности соответственно в точках C, D, E и M. Доказать, что сумма углов DBE и CAM равна 180°.

3. Две окружности пересекаются в точках A и B. Прямые l_1 и l_2 параллельны, причем l_1 проходит через точку A и пересекает окружности в точках E и K, а l_2 проходит через точку B и пересекает окружности в точках M и P. Доказать, что четырехугольник $EKMP$ - параллелограмм.

4. Из точки M проведены к окружности с центром в точке O касательные MA и MB. Прямая l касается окружности в точке C и пересекает MA и MB соответственно в точках D и E. Доказать, что: а) периметр треугольника MDE не зависит от Выбора точки C; б) угол DOE не зависит от выбора точки C.

5. Точки A, B, C и D делят окружность на части, отношение которых 1 : 3 : 5 : 6. Найти углы между касательными к окружности, проведенными в точках A, B, C и D.

6. Две равные окружности внешне касаются друг друга и третьей окружности, радиус которой равен 8 см. Отрезок, соединяющий точки касания двух равных окружностей с третьей, равен 12 см. Найти радиусы равных окружностей.

7. Общая хорда двух пересекающихся окружностей равна a и служит для одной окружности стороной правильного вписанного шестиугольника: а для другой - вписанного квадрата. Найти расстояние между центрами окружностей.

8. Две окружности радиусами, и R касаются внешним образом. Найти длину их общей внешней касательной.

9. Две окружности радиусами r и R касаются внешним образом. Прямая 1 пересекает окружности в точках A, B, C и D так, что $AB = BC = CD$. Найти AD.

10. Две окружности, радиусы которых относятся как 1 : 3, касаются внешним образом, длина их общей внешней касательной $6\sqrt{3}$ см. Найти периметр фигуры, образованной внешними касательными и внешними дугами окружностей.

11. Из внешней точки к окружности проведены секущая длиной 48 см и касательная, длина которой составляет $\frac{2}{3}$ от внутреннего отрезка секущей. Найти радиус окружности, если известно, что секущая удалена от центра на расстояние 24 см.

12. Общая внешняя касательная двух внешне касающихся окружностей составляет с линией центров угол a. Найти отношение радиусов.

13. Из точки A, расположенной вне круга с центром O, проведены секущие ABC и AMK (B и M - ближайшие к A точки окружности, лежащие на секущих). Найти BC, если известно, что $AC = a, \angle CAO = \alpha, \angle COK = \beta$ и секущая AMK проходит через центр окружности.

14. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведены отрезки AC и AD, каждый из которых, являясь хордой одной окружности, касается другой окружности. Доказать, что $AC^2 \cdot BD = AD^2 \cdot BC$.

15. AB и CD - взаимно перпендикулярные пересекающиеся хорды окружности радиуса R. Доказать, что $AC^2 + BD^2 = 4R^2$.

16. Доказать, что сумма квадратов расстояний от точки M, взятой на диаметре

окружности, до концов любой из параллельных этому диаметру хорд есть для данной окружности постоянная величина.
17. Две окружности внешне касаются в точке C, AB - их общая внешняя касательная. Найти радиусы, если $AC = 8$ см, $BC = 6$ см.
18. Окружности радиусами R и $\frac{R}{2}$ касаются внешним образом. Из центра меньшей окружности под углом 30° к линии центров проведен отрезок длиной $2R$. Найти длины тех частей отрезка, которые лежат вне окружностей.
19. Окружности радиусами a и b имеют внутреннее касание $(a < b)$, причем центр большей окружности лежит вне меньшей окружности. Хорда AB большей окружности касается меньшей окружности и образует с общей касательной к окружностям угол α. Найти AB.
20. В правильном треугольнике ABC на сторонах AB и AC взяты точки M и K так, что $AM : MB = 2 : 1$, $AK : KC = 1 : 2$. Доказать, что отрезок KM равен радиусу окружности, описанной около треугольника ABC.
21. Около треугольника ABC $(AB = BC)$ описана окружность. Биссектрисы углов A и C при продолжении пересекают окружность в точках K и P, а друг друга в точке E. Доказать, что четырехугольник $BKEP$ - ромб.
22. AD и CE - биссектрисы треугольника ABC. Окружность, описанная около треугольника BDE, проходит через центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Доказать, что $\angle ABC = 60°$.
23. Доказать, что центр окружности, вписанной в треугольник, лежит внутри треугольника, образованного средними линиями данного треугольника.
24. Прямая l касается окружности, описанной около треугольника ABC, в точке C. Доказать, что квадрат высоты CH треугольника ABC равен произведению расстояний точек A и B от прямой l.
25. Найти углы треугольника, если известно, что центры его вписанной и описанной окружностей симметричны относительно одной из сторон треугольника.
26. Основание равнобедренного треугольника $2a$, высота h. К окружности, вписанной в треугольник, проведена касательная, параллельная основанию. Найти длину отрезка этой касательной, заключенного между боковыми сторонами треугольника.
27. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки 24 и 36 см. Найти катеты.
28. В прямоугольном треугольнике один катет равен 48 см, а проекция другого катета на гипотенузу равна 3,92 см. Найти длину вписанной окружности.
29. В прямоугольном треугольнике с катетами 18 и 24 см найти расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей.
30. В равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию, в 1,5 раза меньше радиуса описанной окружности. Найти угол при основании.
31. Найти радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами a и b и углом γ между ними.
32. В равнобедренном треугольнике основание равно b, угол при основании a.

К окружности, вписанной в треугольник, проведена касательная, параллельная основанию. Найти длину отрезка этой касательной, заключенного между боковыми сторонами треугольника.

33. В равнобедренном треугольнике отношение радиусов вписанной и описанной окружностей равно k. Найти углы треугольника.

34. Доказать, что для любого прямоугольного треугольника справедливо неравенство $0.4 < \frac{r}{h} < 0.5$, где r - радиус вписанной окружности, а h - высота, опущенная на гипотенузу.

35. Доказать, что окружность, описанная около треугольника, равна окружности, проходящей через две его вершины и ортоцентр.

36. В окружность вписан правильный треугольник ABC. На дуге BC взята произвольная точка M и проведены хорды AM, BM и CM. Доказать, что $AM = BM + CM$.

37. Доказать, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки окружности до вершин вписанного в нее правильного треугольника есть величина постоянная, не зависящая от положения точки на окружности.

38. В окружность вписан равнобедренный треугольник ABC $(AB = BC)$. На дуге AB взята произвольная точка K и соединена хордами с вершинами треугольника. Доказать, что $AK \cdot KC = AB^2 - KB^2$.

39. В остроугольном треугольнике со сторонами a, b и c из центра описанной окружности опущены перпендикуляры на стороны. Длины этих перпендикуляров равны соответственно m, n и p. Доказать, что $\frac{m}{a} + \frac{n}{p} + \frac{p}{c} = \frac{mnp}{abc}$.

40. Доказать, что основания перпендикуляров, опущенных на стороны треугольника, или на продолжения сторон из произвольной точки описанной около треугольника окружности, лежат на одной прямой.

41. Доказать, что если a и b - стороны треугольника, l - биссектриса угла между ними и a', b' - отрезки, на которые биссектриса делит третью сторону, то $l^2 = ab - a'b'$.

42. Доказать, что радиус описанной около треугольника окружности, проведенный в одну из вершин треугольника, перпендикулярен прямой, соединяющей основания высот, проведенных из двух других вершин треугольника.

43. Около треугольника ABC описана окружность. Через точку B проведена касательная к окружности до пересечения с продолжением стороны CA за точку A в точке D. Найти периметр треугольника ABC, если $AB+AD = AC$, $CD = 3$, $\angle BAC = 60^\circ$.

44. В окружность радиуса R вписан правильный треугольник ABC. Хорда BD пересекает AC в точке E так, что $AE : CE = 2 : 3$. Найти CD.

45. В трапеции $ABCD$ биссектриса угла A пересекает основание BC (или его продолжение) в точке E. В треугольник ABE вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке M и стороны BE в точке P. Найти угол BAD, если известно, что $AB : MP = 2$.

46. Гипотенуза прямоугольного треугольника делится точкой касания вписанной окружности на отрезки, отношение которых равно k $(k > 1)$. Найти углы треугольника.
47. Найти угол при основании равнобедренного треугольника, если известно, что его ортоцентр лежит на вписанной окружности.
48. Отрезки *AD, BM* и *CP* - медианы треугольника *ABC*. Окружность, описанная около треугольника *DMC,* проходит через центроид треугольника *ABC*. Доказать, что $\angle ABM = \angle PCB$, а $\angle BAD = \angle PCA$.
49. В прямоугольный треугольник вписана полуокружность так, что ее диаметр лежит на гипотенузе, а центр делит гипотенузу на отрезки 15 и 20 см. Найти радиус полуокружности.
50. Окружность проходит через вершину *A* прямоугольного треугольника *ABC*, касса-ется катета *BC* и имеет центр на гипотенузе *AB*. Найти ее радиус, если $AB = c$, $BC = a$.
51. На катете *BC* прямоугольного треугольника *ABC* как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу *AB* в точке *D* так, что $AD : DB = 3 : 1$. Найти стороны треугольника *ABC*, если высота, проведенная к гипотенузе, равна 3 см.
52. Стороны треугольника равны *a* и *b,* угол между ними 1200. Найти радиус окружности, проходящей через две вершины третьей стороны и центр вписанной в данный треугольник окружности.
53. Окружность проходит через вершины *A* и *B* треугольника *ABC* и касается стороны *BC* в точке *B*. Сторона *AC* делится окружностью на части *AM* и *MC* так, что $AM = MC + BC$. Найти *BC*, если $AC = 4$ см.
54. На стороне *AB* треугольника *ABC* как на диаметре построена окружность, пересекающая сторону *BC* в точке *D*. Найти *AC*, если известно, что $CD = 2$ см и $AB = BC = 6$ см.
55. На стороне *AB* треугольника *ABC* как на диаметре построена окружность, пересекающая *AC* в точке *D* и *BC* в точке *E*. Найти *AC* и *BC*, если известно, что $AB=3$ см, $AD : DC = 1 : 1$ и $BE : EC = 7 : 2$.
56. Отрезок *BD* - высота треугольника *ABC,* а *DE* - медиана треугольника *BCD.* В треугольник BDE вписана окружность, касающаяся стороны *BE* в точке *K* и стороны *DE* в точке *M*. Найти углы треугольника *ABC*, если $AB = BC = 8$ см, $KM = 2$ см.
57. В треугольнике *ABC* проведены высота *AD* и окружность с центром в точке *A* и радиусом *AD.* Найти длину дуги этой окружности, лежащей внутри треугольника, если $BC = a$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$.
58. Доказать, что радиус окружности, касающейся гипотенузы и продолжений катетов прямоугольного треугольника, равен сумме длин гипотенузы и радиуса окружности, вписанной в треугольник.
59. Биссектрисы *AD* и *CK* треугольника *ABC* пересекаются в точке O, $KD = = 1$ см. Найти углы и две другие стороны треугольника *KDO,* если известно, что точка *B* лежит на окружности, описанной около треугольника *KDO*.
60. Окружность касается сторон *AC* и *BC* треугольника *ABC* и имеет центр на

AB. Найти радиус окружности, если $AC = 48$ см, $BC = 140$ см, $AB = 148$ см.
61. В треугольнике ABC точка D - середина AC, точка E - середина BC, окружность, описанная около треугольника CDE, проходит через центроид треугольника ABC. Найти длину медианы CK, если $AB = c$.
62. Найти зависимость между сторонами a, b и c треугольника ABC, если известно, что вершина С, центроид M и середины сторон AC и BC лежат на одной окружности.
63. В равнобедренный треугольник ABC с углом B, равным 120°, вписана полуокружность радиуса $(3\sqrt{3}+\sqrt{21})$ см с центром на AC. К полуокружности проведена касательная, пересекающая боковые стороны AB и BC в точках соответственно D и E. Найти BD и BE, если $DE = 2\sqrt{7}$ см.
64. В треугольнике ABC известны стороны: $AB = BC = 39$ см, $AC = 30$ см. Проведены высоты AD и BE. Найти радиус окружности, проходящей через точки D и E и касающейся стороны BC.
65. В треугольнике ABC проведены высоты CD и AE. Около треугольника BDE описана окружность. Найти длину дуги этой окружности, лежащей внутри треугольника ABC, если $AC = b$, $\angle ABC = \beta$.
66. Доказать, что если у треугольника центры вписанной и описанной окружностей совпадают, то он - правильный. (Указание: используйте метод из примера 8).
67. Докажите, что треугольник, у которого совпадают высоты и биссектрисы, проведенные из одной и той же вершины – правильный. (Смотри указание к задаче 1.)
68. а) Докажите первую теорему Вариньона. Середины сторон четырехугольника являются вершинами параллелограмма.
б) Докажите, что если диагонали этого четырехугольника перпендикулярны, то параллелограмм является прямоугольником. (Указание: воспользуйтесь свойствами средней линии треугольника.)
69. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон и середины диагоналей четырехугольника, пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам. (Вторая теорема Вариньона.) (Указание: используйте первую терему Вариньона.)
70. Докажите, что основания высот, опущенных на противоположные стороны остроугольного треугольника из двух его вершин, и сами эти вершины лежат на одной окружности. (Указание: используйте свойство, что диаметр окружности виден из точки, лежащей на этой окружности под прямым углом.)
71. Докажите, что остроугольный треугольник ABC подобен треугольнику $AH_вH_с$, где $H_в$ и $H_с$ – основания высот, проведенных из вершин В и С – соответственно.
72. Обозначим буквой Н точку пересечения высот треугольника ABC. Докажите, что середины сторон треугольника, основания его высот и середины отрезков AH, BH и CH лежат на одной окружности (Окружность Эйлера или девяти точек). (Указание: воспользуйтесь теоремой Вариньона и указанием к предыдущей задаче.)

73. На плоскости проведено несколько одинаковых окружностей так, что ни какие три не проходят через одну точку. Можно ли получившиеся области раскрасить в два цвета так, чтобы две соседние области (имеющие общую сторону) были разного цвета. Исследуйте, насколько принципиально условие, что все окружности равны. Можно ли снять условие, что никакие три окружности не проходят через одну точку. (Указание: попробуйте использовать метод, примененный в примере 10. Части 3).

Пишкова Наталья Евгеньевна, старший преподаватель кафедры математики и информационных технологий педагогического института ТОГУ

ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ

- Задачи на составление уравнений, или текстовые алгебраические задачи, можно условно классифицировать по типам:
- задачи на движение;
- задачи на совместную работу;
- задачи на смеси и сплавы;
- задачи, связанные с понятием «процент», задачи на сложные проценты;
- финансовые и экономические задачи.

Стандартная схема решения текстовой задачи состоит из нескольких этапов:

1. Анализ условия задачи. На этом этапе необходимо определить о каком процессе идет речь в задаче, и какие величины участвуют в этом процессе; какие величины известны, а какие неизвестны, и сколько условий описывают эти величины; что требуется найти.
2. Обозначение буквами x, y, z, ... неизвестных величин, о которых идет речь в задаче.
3. Составление с помощью введенных переменных и известных из условия задачи величин уравнения или системы уравнений (в некоторых случаях – систем неравенств).
4. Решение полученного уравнения или системы уравнений.
5. Отбор решений, подходящих по смыслу задачи.

Выбирая неизвестные и составляя уравнения, мы создаем математическую модель ситуации, описанной в условии задачи. Это означает, что все соотношения должны следовать из конкретных условий задачи, то есть каждое условие должно быть представлено в виде уравнения (или неравенства).

Рассмотрим примеры решения некоторых типов задач из приведенной выше классификации, предварительно выделив особенности задач каждого типа, которые надо учитывать при их решении.

Задачи на движение

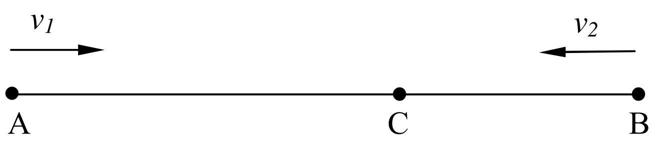
Уравнения, которые составляются на основании условий задач на движение, обычно содержат такие величины, как расстояние, скорости движущихся объектов, время, а также скорость течения воды (при движении по реке). При решении этих задач принимают следующие допущения:

1. Если нет специальных оговорок, то движение считается равномерным.

2. Повороты движущихся тел, переходы на новый режим движения считаются происходящими мгновенно.
3. Если тело с собственной скоростью x движется по реке, скорость течения которой равна v, то скорость движения тела по течению считается равной $(x+v)$, а против течения – $(x-v)$.

При решении задач на движение рекомендуется сделать рисунок, отображающий все условия задачи. При этом решающий задачу должен выбрать схему решения: какого вида уравнения составлять, то есть что сравнивать время, затраченное на движение на отдельных участках пути, или пройденный каждым объектом путь.

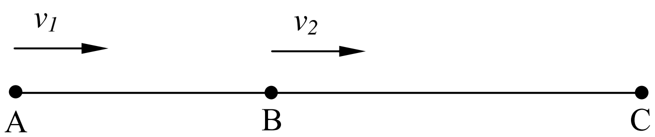
При решении задач такого типа часто необходимо узнать время встречи двух объектов, начинающих движение одновременно из двух точек с разными скоростями и движущихся навстречу друг другу либо в случае, когда один объект догоняет другой.



Пусть расстояние между точками A и B равно S. Два тела начинают движение одновременно, но имеют разные скорости v_1 и v_2. Пусть C – точка встречи, а t – время движения тел до встречи. В случае движения навстречу друг другу имеем AC=v_1t, BC=v_2t. Сложим эти два равенства:

$$AC+CB=v_1t+v_2t=(v_1+v_2)t \Rightarrow AB=S=(v_1+v_2)t \Rightarrow t=\frac{S}{v_1+v_2}.$$

Если одно тело догоняет другое, то теперь получаем $AC=v_1t$, $BC=v_2t$. Вычтем эти равенства:



$AC-BC=(v_1-v_2)t$.
Так как $AC-BC=AB=S$, то время, через которое первое тело догонит второе, определяется равенством

$$t=\frac{S}{v_1-v_2}.$$

Задача 1. *Турист, идущий из деревни на станцию, пройдя за первый час 3 км, рассчитал, что он опоздает к поезду на 40 мин. если будет двигаться с той же скоростью. Поэтому, остальной путь он проходит со скоростью 4 км/ч и прибывает на станцию за 45 мин. до отхода поезда. Каково расстояние от деревни до станции?*

Решение: Задача на движение. Речь идет о движении одного человека, известна первоначальная скорость движения и скорость движения, после первого часа пути. Известно, насколько он опоздает, если будет двигаться с первоначальной скоростью, и на сколько времени придет раньше, изменив скорость движения. Найти нужно одну величину – расстояние от деревни до станции, поэтому введем одну переменную (однако отметим, движение туриста описывают два условия, поэтому можно ввести и две переменные). Заметим также, что в условии задачи время дано как в минутах, так и в часах, поэтому переведем минуты в часы: 40мин. = 40/60ч.=2/3ч, 45мин. = 45/60ч. = 3/4ч.

1 способ.

1) Пусть *x км* – расстояние от деревни до станции;

2) Первоначальная скорость движения 3км/ч

3) Тогда $\frac{x}{3}$ *часов* – время движения туриста от деревни до станции с первоначальной скоростью;

$\frac{(x-3)}{4}$ *часов* – время движения туриста со скоростью 4 км/ч;

$\frac{(x-3)}{4}+1$ *часов* – время, затраченное туристом на путь от деревни до станции;

По условию $\frac{(x-3)}{4}+1+\frac{3}{4}$ - время отхода поезда и $\frac{x}{3}-\frac{2}{3}$ тоже время отхода поезда, поэтому можно составить уравнение: $\frac{(x-3)}{4}+1+\frac{3}{4} = \frac{x}{3}-\frac{2}{3}$

4) Решим полученное уравнение: $\frac{x-3+4+3}{4}=\frac{x-2}{3} \Leftrightarrow x=20$.

5) Через x мы обозначили расстояние между деревней и станцией. Получили положительное число, которое удовлетворяет условиям задачи.

2 способ.

1) Пусть x км – расстояние от деревни до станции; y – время отправления поезда.

2) Тогда $\frac{x}{3}$ *часов* – время движения туриста от деревни до станции с первоначальной скоростью;

$\frac{(x-3)}{4}$ *часов* – время движения туриста со скоростью 4 км/ч;

$\frac{(x-3)}{4}+1$ *часов* – время, затраченное туристом на путь от деревни до станции;

По условию составляем систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} \frac{x}{3}-\frac{2}{3}=y \\ \frac{x-3}{4}+1+\frac{3}{4}=y \end{cases}$$

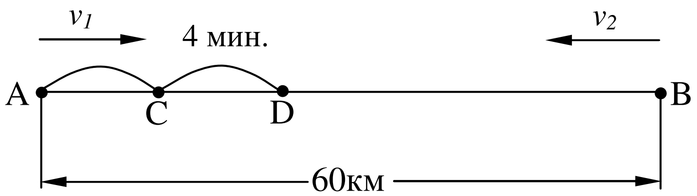
3) Решим эту систему: $\begin{cases} x=3y+2, \\ x=4y-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=20, \\ y=6 \end{cases}$

Ответ: расстояние между деревней и станцией равно 20 км.

Задача 2. *Расстояние между городами А и В равно 60 км. Два поезда выходят одновременно: один из А в В, другой из В в А. Пройдя 20 км, поезд, идущий из А в В, останавливается на полчаса, затем, пройдя 4 минуты, встречает поезд, идущий из В. Оба поезда прибывают к месту назначения одновременно.*

Найдите скорости поездов.

Решение:



1) Отобразим все условия задачи на рисунке.

Заметим, что если время в условии задачи выражено как в часах, так и в минутах, то минуты нужно перевести в часы. В нашем случае 4 мин=4/60 часа=1/15 часа.

2) Так как в задаче надо определить две величины, введем две переменные и составим два уравнения.

Пусть x *км/ч* – скорость поезда, вышедшего из пункта A;

y *км/ч* – скорость поезда, вышедшего из пункта B.

3) Так как в задаче известно расстояние, выразим время через скорость и расстояние.

$\frac{20}{x}$ *часов* – время, за которое поезд из A прошел 20 км.

$\frac{20}{x}+\frac{1}{2}+\frac{1}{15}=\frac{20}{x}+\frac{17}{30}$ *часов*– время, затраченное поездом из A до встречи в пункте D.

$\frac{1}{15}\cdot x$ *км* – расстояние, которое прошел поезд из A за 4 минуты после остановки.

Тогда поезд, идущий из пункта A до встречи в пункте D прошел $20+\frac{x}{15}$ *км*.

$60-\left(20+\frac{x}{15}\right)=40-\frac{x}{15}$ *км* – расстояние, пройденное поездом, идущим из пункта B до встречи.

$\frac{40-\frac{x}{15}}{y}$ *часов* – время, пройденное поездом из B до встречи в пункте D.

Так как по условию задачи поезда выехали одновременно навстречу друг другу и в пункте D встретились, значит они затратили на путь до встречи одинаковое время, поэтому получаем первое уравнение: $\frac{20}{x}+\frac{17}{30}=\frac{40-\frac{x}{15}}{y}$.

С другой стороны, выразим время движения поездов после встречи в пункте D.

Так как $AD=20+\frac{x}{15}$ *км*, то $\frac{20+\frac{x}{15}}{y}$ *часов* – время движения поезда, идущего из пункта B, после встречи до места назначения.

Аналогично, так как $DB=40-\frac{x}{15}$ *км*, то $\frac{40-\frac{x}{15}}{x}$ *часов* – время движения поезда, идущего из пункта A, после встречи до места назначения.

По условию $\dfrac{20+\dfrac{x}{15}}{y}=\dfrac{40-\dfrac{x}{15}}{x}$.

Таким образом, мы составили систему двух уравнений с двумя переменными.

$$\begin{cases}\dfrac{20}{x}+\dfrac{17}{30}=\dfrac{40-\dfrac{x}{15}}{y};\\[2ex] \dfrac{20+\dfrac{x}{15}}{y}=\dfrac{40-\dfrac{x}{15}}{x}.\end{cases}$$

4) Решим систему, для чего из первого уравнения выразим y и подставим это выражение вместо y во второе уравнение.

$$y=\dfrac{40-\dfrac{x}{15}}{\dfrac{20}{x}+\dfrac{17}{30}} \quad\Rightarrow\quad \left(20+\dfrac{x}{15}\right):\dfrac{40-\dfrac{x}{15}}{\dfrac{20}{x}+\dfrac{17}{30}}=\dfrac{40-\dfrac{x}{15}}{x} \quad\Leftrightarrow\quad \left(20+\dfrac{x}{15}\right)\left(\dfrac{20}{x}+\dfrac{17}{30}\right)x=\left(40-\dfrac{x}{15}\right)^2.$$

Решим полученное уравнение

$\left(20+\dfrac{x}{15}\right)\left(20+\dfrac{17x}{30}\right)=1600-\dfrac{16}{3}x+\dfrac{x^2}{225} \quad\Leftrightarrow\quad x^2+540x-36000=0 \quad\Leftrightarrow\quad x_1=60; \quad x_2=-600.$

Так как x – скорость, то x_2 не подходит по смыслу задачи. Подставим полученное значение x в выражение для y

$$y=\dfrac{40-\dfrac{60}{15}}{\dfrac{20}{60}+\dfrac{17}{30}}=\dfrac{36}{\dfrac{54}{60}}=\dfrac{36\cdot 60}{54}=40.$$

Ответ: $v_A=60$ км/ч, $v_B=40$ км/ч.

Задачи на совместную работу

Содержание задач этого типа сводится обычно к следующему: некоторую работу, объем которой не указывается и не является искомым, выполняют несколько человек или механизмов, работающих равномерно, то есть с постоянной для каждого из них производительностью. В таких задачах объем всей работы, которая должна быть выполнена, принимается за 1; время t, требующееся для выполнения всей работы, и p – производительность труда, то есть объем работы, сделанной за единицу времени, связаны соотношением

$$p=\frac{1}{t}.$$

Рассмотрим стандартную схему решения задач этого типа.

Пусть x – время выполнения некоторой работы первым рабочим,

y – время выполнения этой же работы вторым рабочим.

Тогда $\dfrac{1}{x}$ – производительность труда первого рабочего,

$\frac{1}{y}$ – производительность труда второго рабочего.

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ – совместная производительность труда.

$\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=\frac{xy}{x+y}$ – время, за которое они выполнят задание, работая вместе.

Задача 1. *Двое рабочих выполняют некоторую работу. После 45 минут совместной работы первый рабочий был переведен на другую работу, и второй рабочий закончил оставшуюся часть работы за 2 часа 15 минут. За какое время мог бы выполнить работу каждый рабочий в отдельности, если известно, что второму для этого понадобится на 1 час больше, чем первому.*

Решение: 1) Задача на совместную работу. Необходимо найти две величины.

2) Пусть x – время работы первого по выполнению всей работы.

y – время работы второго рабочего.

3) По условию $x=y-1$, и первое уравнение составлено.

Пусть объем всей работы равен 1.

Тогда $\frac{1}{x}$ – производительность труда первого рабочего,

$\frac{1}{y}$ – производительность труда второго рабочего.

Так как они работали 45 мин.=3/4 часа совместно, то

$\frac{3}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ – объем работы, выполненной рабочими за 45 минут.

Так как второй рабочий работал один 2 часа 15 минут=2¼=9/4 часа, то

$\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{y}$ – объем работы, выполненной вторым рабочим за 2 часа 15 минут.

По условию $\frac{3}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{9}{4y}=1.$

Таким образом, мы получили систему двух уравнений: $\begin{cases} x=y-1; \\ \frac{3}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{9}{4y}=1. \end{cases}$

3) Решим полученную систему, для этого выражение для x из первого уравнения подставим во второе

$\frac{3}{4(y-1)}+\frac{3}{y}=1 \Rightarrow 4y^2-19y+12=0 \Rightarrow y_1=\frac{3}{4}$ ч. и $y_2=4$ ч.

5) Из двух значений для y выберем то, которое подходит по смыслу задачи y_1=45 мин., но 45 мин. рабочие работали вместе, а потом второй рабочий работал еще отдельно, поэтому $y_1=\frac{3}{4}$ не подходит по смыслу задачи. Для полученного y_2=4ч. найдем из первого уравнения первоначальной системы

значение x: $x=4-1 \Rightarrow x=3$ ч.

Ответ: первый рабочий выполнит работу за 3 часа, второй – за 4 часа.

Замечание: эту задачу можно было решить, не вводя вторую переменную y, а выразить время работы второго рабочего через x, тогда нужно было составить одно уравнение и решить его.

Задача 2. *Две бригады рабочих начали работу в 8 часов. Сделав вместе 72 детали, они стали работать раздельно. В 15 часов выяснилось, что за время раздельной работы первая бригада сделала на 8 деталей больше, чем вторая. На другой день первая бригада делала за 1 час на одну деталь больше, а вторая бригада за 1 час на одну деталь меньше. Работу бригады начали вместе в 8 часов и, сделав 72 детали, снова стали работать раздельно. Теперь за время раздельной работы первая бригада сделала на 8 деталей больше, чем вторая, уже к 13 часам. Сколько деталей в час делала каждая бригада?*

Решение. 1) Задача на совместную работу, которую производят две бригады.

2) Пусть x деталей в час изготовляет первая бригада (производительность первой бригады).

y – производительность второй бригады.

$x+y$ – совместная производительность бригад.

Так как вместе они сделали 72 детали, то

$\dfrac{72}{x+y}$ – время совместной работы бригад.

Так как бригады работали с 8 до 15 часов, всего 7 часов, то

$7-\dfrac{72}{x+y}$ – время работы бригад раздельно, тогда

$\left(7-\dfrac{72}{x+y}\right)x$ – число деталей, которое изготовила первая бригада, работая отдельно

$\left(7-\dfrac{72}{x+y}\right)y$ – число деталей, которое изготовила вторая бригада, работая отдельно

По условию $\left(7-\dfrac{72}{x+y}\right)x-\left(7-\dfrac{72}{x+y}\right)y=8$ или $\left(7-\dfrac{72}{x+y}\right)(x-y)=8$

Составим второе уравнение. По условию:

$x+1$ – производительность труда первой бригады на другой день.

$y-1$ – производительность труда второй бригады на другой день.

$x+1+y-1=x+y$ – совместная производительность (такая же, как и в первый день).

Так как бригады работали с 8 до 13 часов – всего 5 часов, то

$\left(5-\dfrac{72}{x+y}\right)(x+1)$ – число деталей, которые изготовила первая бригада, работая отдельно, во второй день.

$\left(5-\dfrac{72}{x+y}\right)(y-1)$ – число деталей, которые изготовила вторая бригада, работая отдельно, во второй день.

По условию $\left(5-\dfrac{72}{x+y}\right)(x+1)-\left(5-\dfrac{72}{x+y}\right)(y-1)=8$ или $\left(5-\dfrac{72}{x+y}\right)(x-y+2)=8.$

Таким образом, мы составили систему двух уравнений:

$$\begin{cases}\left(7-\dfrac{72}{x+y}\right)(x-y)=8;\\ \left(5-\dfrac{72}{x+y}\right)(x-y+2)=8.\end{cases}$$

3) Решим эту систему методом замены переменных:

Пусть $\dfrac{72}{x+y}=u,\quad x-y=v$..................(✶)

Тогда имеем: $\begin{cases}(7-u)v=8;\\ (5-u)(v+2)=8\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}7v-uv=8;\\ 5v-uv-2u+2=0.\end{cases}$

Выразим из первого уравнения $u=\dfrac{7v-8}{v}$ и подставим во второе уравнение

$$5v-\frac{7v-8}{v}v-2\cdot\frac{7v-8}{v}+2=0 \Rightarrow v^2+2v-8=0 \Rightarrow v_1=2,\quad v_2=-4.$$

Значение $v_2=-4$ не подходит по смыслу задачи (из условия ясно, что производительность первой бригады выше, чем второй, а значит $x-y=v>0$). Найдем значение u, соответствующее $v_2=2$, подставив значение v_2 в выражение для u:

$$u=\frac{7\cdot 2-8}{2}=3.$$

Так как нам нужно найти значения x и y, подставим полученные значения для u и v в (✶)

$$\begin{cases}\dfrac{72}{x+y}=3;\\ x-y=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{72}{2y+2}=3;\\ x=2+y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{36}{y+1}=3;\\ x=2+y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=11;\\ x=2+y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=11;\\ x=13.\end{cases}$$

Ответ: 13 деталей в час изготавливала первая бригада; 11 деталей в час изготавливала вторая бригада.

Задачи на смеси и сплавы

В задачах этого типа основным является понятие «концентрация». Что же это такое?

Рассмотрим, например, раствор кислоты в воде. Пусть в сосуде содержится 10 литров раствора, который состоит из 3 литров кислоты и 7 литров воды. Тогда относительное (по отношению ко всему объему) содержание кислоты в растворе равно $\frac{3}{10}=0{,}3$. Это число и определяет концентрацию кислоты в растворе. Иногда говорят о процентном содержании кислоты в растворе. В приведенном примере процентное содержание будет таково: $\frac{3}{10}\cdot 100\% = 30\%$. Как видно, переход от концентрации к процентному содержанию и наоборот весьма прост.

Итак, пусть смесь массы M содержит некоторое вещество массой m. Тогда:

- концентрацией данного вещества в смеси (сплаве) называется величина

$$c=\frac{m}{M};$$

- процентным содержанием данного вещества называется величина $c\cdot 100\%$;

Из последней формулы следует, что при известных величинах концентрации вещества и общей массы смеси (сплава) масса данного вещества определяется по формуле $m=c\cdot M$.

Задачи на смеси (сплавы) можно разделить на два вида:

1. Задаются, например, две смеси (сплава) с массами m_1 и m_2 и с концентрациями в них некоторого вещества, равными соответственно c_1 и c_2. Смеси (сплавы) сливают (сплавляют). Требуется определить массу этого вещества в новой смеси (сплаве) и его новую концентрацию. Ясно, что в новой смеси (сплаве) масса данного вещества равна $c_1m_1+c_2m_2$, а концентрация

$$c=\frac{c_1m_1+c_2m_2}{m_1+m_2}.$$

2. Задается некоторый объем смеси (сплава) и от этого объема начинают отливать (убирать) определенное количество смеси (сплава), а затем доливать (добавлять) такое же или другое количество смеси (сплава) с такой же концентрацией данного вещества или с другой концентрацией. Эта операция проводится несколько раз.

При решении таких задач необходимо установить контроль за количеством данного вещества и его концентрацией при каждом отливе, а также при каждом доливе смеси. В результате такого контроля получаем разрешающее уравнение. Рассмотрим конкретные задачи.

Задача 1. *Имеется кусок сплава меди с оловом общей массой 12 кг, содержащий 45% меди. Сколько чистого олова надо добавить к этому куску сплава, чтобы получившийся новый сплав содержал 40% меди?*

Решение: 1) Задача на смеси и сплавы. Необходимо найти одну величину.

2) Пусть x кг олова надо добавить к сплаву. Так как процентное содержание меди в сплаве равно 45 %, то масса меди в первоначальном сплаве $m=0{,}45\cdot 12=5{,}4$ кг (где 0,45 – концентрация меди в сплаве).

3) Тогда $12+x$ – масса нового сплава, и так как масса меди в первоначальном

сплаве равна 5,4 кг, то

$\frac{5{,}4}{12+x}$ – концентрация меди в новом сплаве. По условию $\frac{5{,}4}{12+x}=0{,}4$

4) Решая уравнение, получаем $x=1{,}5$ кг.

Ответ: нужно добавить 1,5 кг чистого олова.

Задача 2. *Имеются два раствора кислоты разной концентрации. Объем одного раствора 4 л, другого – 6 л. Если их слить вместе, то получится 35 % раствор кислоты. Если же слить равные объемы этих растворов, то получится 36 % раствор кислоты. Сколько литров кислоты содержится в каждом из первоначальных растворов?*

Решение: 1) В задаче необходимо найти две величины.

2) Пусть x л кислоты содержится в первом растворе,

y л кислоты содержится во втором растворе.

3) Тогда $\frac{x}{4}$ – концентрация кислоты в первом растворе, $\frac{y}{6}$ – концентрации кислоты во втором растворе. Если слить два раствора, то получим раствор массой $4л+6л=10л$, причем масса кислоты в нем будет $x+y$, тогда

$\frac{x+y}{10}$ – концентрация кислоты, после сливания обоих растворов.

Так как по условию в полученном таким образом растворе содержится 35% кислоты, то ее концентрация там равна 0,35.

Таким образом, получаем: $\frac{x+y}{10}=0{,}35$ или $x+y=3{,}5$.

Если будем сливать равные объемы растворов по m литров, то

$\frac{x}{4}m+\frac{x}{6}m$ – масса кислоты в полученном растворе, $2m$ – масса полученного раствора,

тогда $\dfrac{\frac{x}{4}m+\frac{y}{6}m}{2m}$ – концентрация кислоты в полученном растворе. По условию

$$\frac{\frac{x}{4}m+\frac{y}{6}m}{2m}=0{,}36 \text{ или } \frac{x}{8}+\frac{y}{12}=0{,}36.$$

Таким образом, получили систему двух уравнений.

3) Решим ее: $\begin{cases} x+y=3{,}5; \\ \frac{x}{8}+\frac{y}{12}=0{,}36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=3{,}5; \\ 6x+4y=17{,}28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3{,}5-y; \\ 6(3{,}5-y)+4y=17{,}28 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=3{,}5-y; \\ y=1{,}86 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1{,}64; \\ y=1{,}86. \end{cases}$$

Ответ: в первом растворе содержится 1,64 л кислоты, во втором – 1,86 л.

Задачи на проценты

Решение задач этого типа тесно связано с тремя алгоритмами: нахождения части от целого, восстановление целого по его известной части, нахождение процентного прироста. Рассмотрим эти алгоритмы.

1. Пусть известна некоторая величина A, надо найти a % этой величины.

Если считать, что A есть 100%, а неизвестная часть x это a %, то из пропорции

$$\frac{A}{100}=\frac{x}{a} \quad \text{имеем} \quad x=A\cdot\frac{a}{100}.$$

2. Пусть известно, что некоторое число b составляет a % от неизвестной величины A. Требуется найти A.

Рассуждая аналогично, из пропорции получаем $A=b\cdot\frac{100}{a}$.

3. Пусть некоторая переменная величина A, зависящая от времени t, в начальный момент t_0 имеет значение A_0, а в момент t_1 – значение A_1.

Тогда абсолютный прирост величины A за время $t_1–t_0$ будет равен $A_1–A_0$; относительный прирост этой величины вычисляется по формуле $\frac{A_1-A_0}{A_0}$, а процентный прирост по формуле $\frac{A_1-A_0}{A_0}\cdot 100\,\%$.

Задача 1. *В конце году вкладчику на его сбережения сбербанк начислил проценты, что составило 6 рублей. Добавив 44 рубля, вкладчик оставил деньги ещё на год. После истечения года вновь были начислены проценты, и теперь вклад вместе с процентами составил 257руб. 50 коп. Какая сумма первоначально была положена в банк?*

Решение: 1) Задача на проценты. Необходимо найти одну величину, но в задаче эту величину описывают два условия, поэтому введем две переменные.

2) Пусть A – первоначальная сумма равна;

p – годовой процент начисления.

3) Тогда по условию $A\cdot\frac{p}{100}=6$;

$A+A\cdot\frac{p}{100}$ - сумма на вкладе через год, с учетом процентов; $A+A\cdot\frac{p}{100}+44$ - сумма на вкладе, после добавления 44 рублей;

$\left(A+A\cdot\frac{p}{100}+44\right)\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)$ - стало на вкладе еще через год с учетом процентов;

по условию: $\left(A+A\cdot\frac{p}{100}+44\right)\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)=257{,}5$.

Таким образом для определения A и p получили систему:
$$\begin{cases} A\cdot\frac{p}{100}=6; \\ \left(A+A\cdot\frac{p}{100}+44\right)\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)=257{,}5 \end{cases}$$

4) Решим систему, выразив из первого уравнения p , и подставив это выражение во второе уравнение: $\left(A + A\cdot\frac{6}{A} + 44\right)\cdot\left(1+\frac{6}{A}\right) = 257{,}5 \quad \Rightarrow A = 200$, тогда из первого уравнения: $p = 3\%$.

Ответ: первоначально на счет было положено 200 рублей.

Задачи для самостоятельного решения

Задачи на движение

1. Расстояние по реке между пунктами **А** и **В** равно **41** километр. Из пункта **А** в пункт **В** по течению плывёт моторная лодка, собственная скорость которой равна **18** км/час, а из пункта **В** в пункт **А** движется вторая моторная лодка, собственная скорость которой равна **16** км/час. При встрече оказалось, что первая лодка плыла **1** час, а вторая **1,5** часа. Найти скорость течения реки.
2. Из пункта **А** в пункт **В** вышел товарный поезд. Спустя **3** часа вслед за ним вышел пассажирский поезд, скорость которого на **30** км/час больше скорости товарного. Через **15** часов после своего выхода, пассажирский поезд, обогнав товарный, находился от него на расстоянии **300** км. Найти скорость товарного поезда.
3. Из пунктов **А** и **В** вышли навстречу друг другу два поезда, причём второй поезд вышел на полчаса позже первого. Через **2** часа после выхода первого поезда, расстояние между ними составляло $\frac{19}{30}$ расстояния между пунктами **А** и **В.** Поезда встретились на середине пути из **А** и **В.** Сколько времени потребуется каждому поезду, чтобы пройти весь путь от **А** до **В**?
4. Два пешехода, находящиеся в пунктах **А** и **В**, между которыми по прямой расстояние **27** км, выходят из этих пунктов одновременно, двигаясь по прямой **АВ.** Они встречаются через **3** часа, если идут навстречу друг другу, и один догоняет другого через **9** часов, если идут в одном направлении. Найти скорость каждого пешехода.
5. Турист, идущий из деревни на станцию, пройдя за первый час **3** км, рассчитал, что он опоздает на **40** минут, если будет двигаться с той же скоростью. Поэтому остальной путь он проходит со скоростью **4** км/час и прибывает на станцию за **45** минут до отхода поезда. Каково расстояние от деревни до станции?
6. Между станцией и посёлком **4** км. Мальчик и автомобиль одновременно отправились со станции в посёлок. Через **10** минут мальчик встретил автомобиль, возвращающийся из посёлка, а ещё через $\frac{1}{14}$ км от места встречи автомобиль, который дошёл до станции и опять направился в посёлок, нагнал

мальчика. Найти их скорости, если известно, что двигались они равномерно и не делали в пути остановок.

7. Два поезда отправляются одновременно навстречу друг другу со станций **А** и **В**, расстояние между которыми **600** км. Первый из них приходит на станцию **В** на три часа раньше, чем второй на станцию **А**. В то время, как первый делает **250** км, второй проходит

200 км. Найти скорость каждого поезда.

8. На пристани с теплохода сошли два пассажира и направились в один и тот же посёлок. Один из них первую половину **пути** шёл со скоростью **5** км/час, а вторую половину пути - со скоростью **4** км/час. Другой шёл первую половину **времени** со скоростью **5** км/час, а вторую половину **времени** - со скоростью **4** км/час, и пришёл в посёлок на **1** минуту раньше первого. За какое время каждый из них прошёл весь путь и каково расстояние между пристанью и посёлком?

9. Три парохода совершают рейс между пристанями **А** и **В**. Первый пароход проходит в час на **3** км больше, чем второй, а весь рейс совершает на **2** часа быстрее второго. Второй пароход проходит в час на **3** км больше, чем третий, а весь рейс совершает на **3** часа быстрее третьего. Определить скорость третьего парохода и расстояние между пристанями **А** и **В**.

10. Два пешехода одновременно отправились из пункта **С** в противоположных направлениях: первый в пункт **А**, а второй в пункт **В**. Прибыв в соответствующие пункты, они немедленно повернули обратно и встретились на полпути между **А** и **В**. Если бы первый отправился в пункт **В**, а второй в **А**, то первый дойдя до **В** и немедленно повернув обратно, настиг бы второго в пункте **А**. Найти расстояние от пункта **А** до **С** и отношение скоростей пешеходов, если расстояние от **А** до **В** равно **2** км.

11. Из пункта **А** в пункт в **В**, расположенный в **24** км от **А,** одновременно отправились велосипедист и пешеход. Велосипедист прибыл в пункт **В** на **4** часа раньше пешехода. Известно, что если бы велосипедист ехал со скоростью, меньшей на **4** км/ч, то на путь из **А** в **В** он затратил бы вдвое меньше времени, чем пешеход. Найдите скорость пешехода.

12. Два поезда отправляются навстречу друг другу из городов **А** и **В**. Если поезд из города **А** отправится на **1,5** часа раньше, чем поезд из города **В**, то они встретятся на половине пути. Если оба поезда выйдут одновременно, то через **6** часов они ещё не встретятся, а расстояние между ними составит десятую часть первоначального**.** За сколько часов может проехать каждый поезд расстояние из **А** в **В**?

13. Два велосипедиста стартовали одновременно и движутся в одном направлении с постоянной скоростью по трассе. В момент старта второй велосипедист находился перед первым на расстоянии

146 м. Первый велосипедист догнал второго через **1** минуту, пройдя расстояние, равное $\frac{1}{120}$ от общей протяженности дистанции, и финишировал на **30** минут раньше второго. Определите скорость первого велосипедиста (в км/ч).

14. Расстояние между пристанями **А** и **В** по реке равно **36** км. Из **А** в **В** отплыл плот, а из **В** в **А** спустя **8** часов отошла лодка. В пункты назначения они прибыли одновременно. Какова скорость плота, если собственная скорость лодки **12** км/ч?

15. Велосипедист каждую минуту проезжает на **800** метров меньше, чем мотоциклист, поэтому на путь в **30** км он затратил время на **2** часа больше, чем мотоциклист. Сколько километров в час проезжает мотоциклист?

16. За **200** км до станции назначения поезд был задержан у семафора на час. Затем машинист увеличил на **10** км/час скорость, с которой поезд ехал до остановки, и поэтому он прибыл в пункт назначения по расписанию. С какой скоростью ехал поезд после остановки?

17. Расстояние между пристанями **А** и **В** равно **72 км** (по реке). От пристани **А** в сторону пристани **В** отправился плот. Спустя **12** часов от пристани **В** навстречу плоту вышла моторная лодка, собственная скорость которой равна **16 км/ч**. Найдите скорость плота, если к пристаням А и В плот и лодка прибыли одновременно.

18. Из пункта **А** в пункт **В** выехал автомобиль. В тот момент, когда он проехал **20 км**, следом за ним выехал мотоциклист. Мотоциклист догнал автомобиль и повернул обратно. Автомобиль прибыл в пункт **В** в тот момент, когда мотоциклист вернулся в пункт **А**. Каково расстояние между пунктами, если автомобиль был в пути в полтора раза дольше, чем мотоциклист?

19. Два велосипедиста одновременно отправились в **216**-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на **6** км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл на **6** часов раньше второго. Найти скорость велосипедиста, прибывшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

20. Из пункта **А** в пункт **В** одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на **15** км/ч, а вторую половину пути - со скоростью **90** км/ч, в результате чего прибыл в пункт **В** одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля, если известно, что она больше 54 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

21. Из пункта **А** круговой трассы выехал велосипедист. Через **30** минут он еще не вернулся в пункт **А**, и из пункта **А** следом за ним отправился мотоциклист. Через **10** минут после отправления он догнал велосипедиста в первый раз, а еще через **30** минут после этого догнал его во второй раз. Найдите скорость мотоциклиста, если длина трассы равна **30** км. Ответ дайте в км/ч

22. Два бегуна одновременно стартовали в одном направлении из одного и того же места круговой трассы. Спустя **один час,** когда одному из них оставался **1** км до окончания первого круга, ему сообщили что второй бегун прошел первый круг **5** минут назад. Найдите скорость первого бегуна, если известно, что она на **2** км/ч меньше скорости второго. Ответ дайте в км/ч.
23. Из пункта **А** круговой трассы, длина которой равна **30 км**, одновременно, в одном направлении стартовали два автомобилиста. Скорость первого равна **92 км/ч**, скорость второго – **77 км/ч**. Через сколько минут первый автомобилист будет опережать второго ровно на **1** круг?
24. Первые **120** км автомобиль ехал со скоростью **60 км/ч**, следующие **180 км** — со скоростью **80** км/ч, а затем **200** км — со скоростью **100** км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.
25. **Половину времени**, затраченного на дорогу, автомобиль ехал со скоростью **60 км/ч**, а **вторую половину времени** – со скоростью **46 км/ч**. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.
26. **Первую половину трассы** автомобиль ехал со скоростью **90 км/ч,** а **вторую** – со скоростью **60 км/ч.** Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.
27. Товарный поезд, идущий со скоростью **30 км/ч,** проезжает мимо придорожного столба за **36** секунд. Определите длину поезда (в метрах).
28. Велосипедист отправился с некоторой скоростью из города **А** в город **В**, расстояние между которыми **88** км. Возвращаясь из **В** в **А**, он ехал поначалу с той же скоростью, но через один час пути вынужден был сделать остановку на **15** минут. После этого он продолжил путь в **А**, увеличив скорость на **2** км/ч, и в результате затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из **А** в **В**. Найти первоначальную скорость велосипедиста.
29. В гонке продолжительностью один час первый мотоциклист прошел на **64 км** больше, чем второй, так как **1 км** он проходил на **20** секунд быстрее, чем второй. Найдите скорость первого мотоциклиста (в км/ч).
30. По двум параллельным железнодорожным путям в одном направлении следуют пассажирский и товарный поезда, скорости которых равны соответственно **80 км/ч** и **50 км/ч**. Длина товарного поезда равна **1200** метрам. Найдите длину пассажирского поезда, если время, за которое он прошёл мимо товарного поезда, равно 3 минутам. Ответ дайте в метрах.

Задачи на работу

1. Бригада лесорубов должна была по плану заготовить за несколько дней 216 кубометров древесины. Первые 3 дня бригада выполняла ежедневно установленную планом норму, а затем каждый день заготовляла 8 кубометров сверх плана, и поэтому за 1 день до срока было заготовлено 232 кубометра

древесины. Сколько кубических метров древесины в день должна была бригада заготовить по плану.

2. Обувная фабрика за первую неделю выполнила 20% месячного плана, за вторую 120% количества продукции, выработанной за первую неделю, а за третью неделю – 60% продукции, выработанной за первые две недели вместе. Каков месячный план выпуска обуви, если известно, что для его выполнения необходимо за последнюю неделю месяца изготовить 1480 пар обуви?

3. Двум рабочим была поручена работа. Второй приступил к работе на 1 час позже первого. Через 3 часа после того, как первый приступил к работе, им осталось выполнить 9/20 всей работы. По окончании работы оказалось, что каждый выполнил половину всей работы. За сколько часов каждый, работая отдельно, может выполнить работу?

4. Два землекопа, работая вместе, выкопали канаву за 12 часов. Если бы сначала один из них выкопал половину канавы, а другой оставшуюся половину, то на всю работу им понадобилось бы 25 часов. За сколько часов каждый выкопает канаву отдельно?

5. Двое рабочих вытачивают вместе 136 деталей за 8 часов. Если бы первый делал на 2 детали в час меньше, а второй на 1 деталь в час больше, то на изготовление одной детали второй рабочий тратил бы на 4 минуты меньше, чем первый. Сколько деталей в час изготавливает первый рабочий?

6. Обычно к выполнению некоторого задания привлекаются одновременно два механизма. Производительность этих механизмов неодинакова и при совместном действии задание выполняется ими за 30 часов. Но на этот раз совместная работа этих двух механизмов продолжалась только 6 часов, после чего первый механизм был остановлен и всю остальную часть задания выполнил второй механизм за 40 часов. За какое время такое же задание может выполнить каждый механизм, работая отдельно, с присущей ему производительностью?

7. Первому трактористу на вспашку всего поля требуется на 2 часа меньше, чем третьему и на 1 час больше, чем второму. При совместной работе первого и второго тракторов поле может быть вспахано за 1 час 12 минут. Какое время на вспашку поля будет затрачено при совместной работе всех трёх тракторов?

8. Двум рабочим было поручено изготовить партию одинаковых деталей. После того, как первый проработал 10 часов, а второй-6 часов, оказалось, что они выполнили 75% всей работы. Проработав ещё совместно 2 часа, они установили, что им осталось выполнить 1/15 всей работы. За сколько часов каждый из них, работая отдельно, мог бы выполнить всю работу?

9. На обработку одной детали один рабочий затрачивает времени на 7 минут меньше, чем другой. Сколько деталей каждый из них обрабатывает за 4 часа, если первый обрабатывает за это время на 28 деталей больше второго?

10. Двое рабочих выполнили всю работу за 10 дней, причём последние два дня первый из них не работал. За сколько дней первый рабочий выполнил бы всю работу, если известно, что за первые 7 дней они вместе выполнили 80% всей работы.
11. На вагоноремонтном заводе в определённый срок должно быть отремонтировано 330 вагонов. Ремонтируя, в среднем, на 3 вагона в неделю больше, чем планировалось, на заводе уже за 2 недели до срока отремонтировали 297 вагонов. Сколько вагонов в неделю ремонтировали на заводе?
12. Валя и Галя пропалывают грядку за 8 минут, а одна Галя - за 10 минут. За сколько минут пропалывает грядку одна Валя?
13. Игорь и Паша красят забор за 18 часов. Паша и Володя красят этот же забор за 24 часа, а Володя и Игорь – за 36 часов. За сколько часов мальчики покрасят забор, работая втроём?
14. Первый и второй насосы наполняют бассейн за 10 минут, второй и третий - за 15 минут, а первый и третий – за 24 минуты. За сколько минут эти три насоса, заполнят бассейн, работая вместе?
15. Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали выполнять два одинаковых заказа. В первой бригаде было 12 рабочих, а во второй – 21 рабочий. Через 10 дней после начала работы в первую бригаду перешли 12 рабочих из второй бригады. В итоге оба заказа были выполнены одновременно. Найдите, сколько дней потребовалось на выполнение заказов.

Задачи на смеси, сплавы, растворы

1. Имеется кусок сплава меди с оловом массой 12 килограмм, содержащий 45% меди. Сколько чистого олова

надо прибавить к этому сплаву, чтобы получившийся сплав содержал 40% меди?
2. В сосуде было 12 литров соляной кислоты. Часть кислоты отлили и сосуд долили водой. Затем снова отлили столько же и опять долили водой. Сколько жидкости отливали каждый раз, если в сосуде оказался 25%-ный раствор кислоты?
3. Из сосуда ёмкостью 54 литра, наполненного кислотой, вылили несколько литров и долили сосуд водой, потом опять вылили столько же литров смеси. Тогда в оставшейся в сосуде смеси оказалось 24 литра чистой кислоты. Сколько кислоты вылили в первый раз?
4. Имеется сталь двух сортов с содержанием никеля 5% и 40%

Сколько стали того и другого сорта надо взять, чтобы после переплавки получить 140 тонн стали с содержанием никеля 30%?

5. Смешали 30%-ный раствор соляной кислоты с 10%-ным и получили 600 грамм 15%-ного раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?
6. В двух сплавах медь и цинк относятся как 5:2 и 3:4 по весу. Сколько нужно взять килограммов первого сплава и сколько второго, чтобы после переплавки получить 28 килограммов нового сплава с равным содержанием в нём меди и цинка?
7. В сосуд, содержащий 7 литров 15%-ного водного раствора некоторого вещества, добавили 8 литров воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?
8. Есть два раствора щелочи суммарного объёма 19 литров. Первый раствор содержит 5 литров щелочи, второй – 2 литра. Найдите объём в литрах первого раствора, если процентное содержание щелочи в нём в 1,5 раза меньше, чем во втором.
9. Имеется два сосуда. Первый содержит 100 кг, а второй – 50 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 28 % кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 36% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?
10. Имеется два сосуда, содержащие 42 кг и 6 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 40 % кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 50% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом растворе?
11. Смешав 70%-й и 60%-й растворы кислоты и добавив 2 кг чистой воды, получили 50%-й раствор кислоты. Если бы вместо 2 кг воды, добавили 2 кг 90%-ного раствора той же кислоты, то получился бы 70%-ый раствор кислоты. Сколько килограммов 70%-ного раствора использовали для получения смеси?
12. Имеется два кислотных раствора: один 20%, другой 30%. Взяли 0,5 л первого и 1,5 л второго раствора и образовали новый раствор. Какова концентрация кислоты в новом растворе?

Задачи на проценты, сложные проценты

1.В комиссионном магазине цена товара, выставленного на продажу, ежемесячно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый месяц уменьшалась цена товара, если выставленный на продажу за 8000 рублей, он через три месяца стал стоить 4096 рублей.
2. В комиссионном магазине цена товара, выставленного на продажу, ежемесячно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый месяц уменьшалась цена

товара, если выставленный на продажу за 10000 рублей, он через четыре месяца стал стоить 1296 рублей.

3. Цена холодильника в магазине ежегодно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый год уменьшалась цена холодильника, если, выставленный на продажу за 19800 рублей, через два года был продан за 16038 рублей.

4. Бизнесмен Бубликов получил в 2010 году прибыль в размере 5000 рублей. Каждый следующий год его прибыль увеличивалась на 300% по сравнению с предыдущим годом. Сколько рублей заработал Бубликов за 2013 год?

5. Семья состоит из мужа, жены и их дочери студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 67%. Если бы стипендия дочери уменьшилась втрое, общий доход семьи сократился бы на 4%.
Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

6. В четверг акции компании подорожали на некоторое число процентов, а в пятницу подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 9% дешевле, чем при открытии торгов в четверг. На сколько процентов подорожали акции компании в четверг?

7. Численность волков в двух заповедниках в 2013 году составляла 220 особей. Через год обнаружили, что в первом заповеднике численность волков возросла на 10%, а во втором – на 20%. В результате общая численность волков в двух заповедниках составила 250 особей. Сколько волков было в первом заповеднике в 2013 году?

8. Брюки дороже рубашки на 30% и дешевле пиджака на 22%. На сколько процентов рубашка дешевле пиджака?

9. Три килограмма черешни стоят столько же, сколько пять килограммов вишни, а три килограмма вишни – столько же, сколько два килограмма клубники. На сколько процентов килограмм клубники дешевле килограмма черешни?

10. Четыре рубашки дешевле куртки на 20%. На сколько процентов шесть рубашек дороже куртки?

11. Митя, Антон, Гоша и Борис учредили компанию с уставным капиталом 200000 рублей (200 тыс.руб.). Митя внёс 14% уставного капитала, Антон – 42000 рублей, Гоша – 0,12 уставного капитала, а оставшуюся часть капитала внёс Борис. Учредители договорились делить ежегодную прибыль пропорционально внесённому в уставной капитал вкладу. Какая сумма от прибыли в 1 млн. рублей причитается Борису?

12. Объёмы ежемесячной добычи газа на первом, втором и третьем месторождениях относятся как 7:6:14. Планируется уменьшить месячную

добычу газа на первом месторождении на 14% и на втором– тоже на 14%. На сколько процентов нужно увеличить месячную добычу газа на третьем месторождении, чтобы суммарный объём добываемого за месяц газа не изменился?
13. Подарочный набор состоит из трёх сортов конфет. Массы конфет первого, второго и третьего сорта относятся как 1:2:8. Массу конфет первого сорта увеличили на 20%, а второго – на 6%. На сколько процентов нужно уменьшить массу конфет третьего сорта, чтобы масса всего набора не изменилась?
14. Цена товара изменяется два раза в год: в марте она повышается на 25%, а в октябре снижается на 25%. Какова будет цена товара в ноябре 2016 года, если в феврале 2015 она составляла 5120 рублей?
15. В банк кладётся некоторая сумма денег. В каком случае на счету окажется больше денег: если банк начисляет 6% от имеющейся суммы один раз в год или если вклад через каждые три месяца увеличивается на 1,5%?
16. Две матрёшки общей стоимостью 225 $ были проданы с общей прибылью в 40%. Какова стоимость каждой матрёшки, если от продажи первой прибыль составила 25%, а от продажи второй – 50%?
17. Цену товара снизили сначала на 20%, затем новую снизили ещё на 15%, и наконец, снизили ещё на 10%. На сколько процентов всего снизили первоначальную цену товара?

Экономические задачи

1. Клиент А сделал вклад в банке в размере 7500 рублей. Проценты по вкладу начисляются раз в году и прибавляются к текущей сумме вклада. Ровно через год на тех же условиях такой же вклад в том же банке сделал клиент Б. Ещё ровно через год клиенты А и Б закрыли вклады и забрали все накопившиеся деньги. При этом клиент А получил на 477 рублей больше, чем клиент Б. Какой процент годовых начислял банк по этим вкладам?
2. 31 декабря 2014 года клиент взял в банке 9 282 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т.е. увеличивает долг на 10%), затем клиент переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма перевода X, чтобы клиент выплатил долг четырьмя равными платежами (т.е. за четыре года)?
3. 15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину

меньше долга на 15 число предыдущего месяца.
Известно, что в течение первого года кредитования нужно вернуть банку 2466 тысяч рублей. Какую сумму нужно выплатить банку за последние 12 месяцев?

4. 15 января планируется взять кредит в банке на 39 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15 число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма долговых выплат после полного погашения кредита будет на 20% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

5. 15 января планируется взять кредит в банке на 15 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15 число предыдущего месяца.

Известно, что восьмая выплата составила 108 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования?

Для заметок